Mathematisches Institut
der Universität München

Stochastik
Übungsblatt 9

Prof. Dr. Holger Kösters
WS 2014/15

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Wie oft müssen wir eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p Kopf zeigt, mindestens werfen, damit die relative Häufigkeit von Kopf mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 0.9 um höchstens 0.01 von p abweicht ? Geben Sie mit Hilfe der Tschebyscheff'schen Ungleichung eine Abschätzung für die Anzahl der benötigten Würfe an!

Aufgabe T2

Sei X eine zum Parameter $\lambda > 0$ poissonverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie $E(s^X)$ $(s > 0)$ und verwenden Sie Ihr Ergebnis, um erneut $E(X)$ und $Var(X)$ zu berechnen.

Aufgabe T3

Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\big([0,1], \mathcal{B}\big([0,1]\big), \mathcal{U}\big([0,1]\big)\big)$ seien die Zufallsvariablen $X_n := n\,1_{[0,1/n]}$, $n \in \mathbb{N}$, definiert. Untersuchen Sie, ob X_n stochastisch oder fast sicher konvergiert (für $n \to \infty$).

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Seien X_n, Y_n, $n \in \mathbb{N}$, sowie X, Y Zufallsvariablen mit $X_n \xrightarrow{P} X$ und $Y_n \xrightarrow{P} Y$. Zeigen Sie:

(i) $X_n + Y_n \xrightarrow{P} X + Y$

(ii) $g(X_n) \xrightarrow{P} g(X)$ für jede gleichmäßig stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Sternchen-Aufgabe: Zeigen Sie, dass (ii) für jede stetige Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe H2

Sei für jedes $n \in \mathbb{N}$ X_n eine zum Parameter n poissonverteilte Zufallsvariable.

(i) Zeigen Sie mit Hilfe der Tschebyscheff-Ungleichung, dass $(X_n/n) \xrightarrow{P} 1$.

(ii) Untersuchen Sie mit Hilfe der Markoff-Ungleichung, ob $(X_n/n) \xrightarrow{\text{f.s.}} 1$.

Aufgabe H3

Ich schlage Ihnen folgendes Spiel vor: Sie starten mit einem Startkapital von 100 Euro. Ich werfe immer wieder eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $p \in (\frac{1}{3}, \frac{1}{2})$ Kopf zeigt. Jedes Mal, wenn die Münze Kopf zeigt, verdopple ich Ihr Kapital, andernfalls müssen Sie mir die Hälfte Ihres Kapitals geben.

(i) Definieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, und definieren Sie auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum Zufallsvariablen X_n, die Ihr Kapital nach dem n-ten Münzwurf beschreiben, $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Zeigen Sie: $E(X_n) \to \infty$.

(iii) Zeigen Sie: $X_n \to 0$ fast sicher.

Was bedeuten die Ausssagen (ii) und (iii)? Würden Sie sich auf dieses Spiel einlassen?

Aufgabe H4

Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen mit Werten in $[0,1]$. Seien X_k, $k \in \mathbb{N}$, unabhängige Zufallsvariablen mit $P[X_k = 1] = a_k$ und $P[X_k = 0] = 1 - a_k$.

(i) Bestimmen Sie eine zu $X_n \xrightarrow{P} 0$ äquivalente Bedingung an die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

(ii) Bestimmen Sie eine zu $X_n \xrightarrow{\text{f.s.}} 0$ äquivalente Bedingung an die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Abgabe der Hausaufgaben bis 15.12.2014, 12:15 Uhr, in den Übungskasten