Mathematisches Institut
der Universität München

Stochastik
Übungsblatt 7

Prof. Dr. Holger Kösters
WS 2014/15

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

(i) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable die Exponential-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist.

(ii) Berechnen Sie den Erwartungswert einer Zufallsvariable die Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda > 0$ ist.

(iii) Es seinen X, Y zwei Zufallsvariablen, deren gemeinsame Verteilung definiert wird durch die Dichte

$$\rho_{X,Y}(x,y) = 3^{-x}2^{-y}$$

für $x \in \mathbb{N}^+$, $y \in \mathbb{N}_0$. Überzeugen Sie sich zunächst, dass dies wirklich eine Dichte ist. Berechnen Sie dann den Erwartungswert von X und von Y sowie von dem Produkt $X \cdot Y$.

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Berechnen Sie im Falle seiner Existenz

$$E[(1+X)^{-1}]$$

wobei X eine

(i) zum Parameter $\lambda \geq 0$ poisson-

(ii) zu den Parametern (n, p) binominal-

verteilte Zufallsvariable ist.

Aufgabe H2

Sei X eine Zufallsvariable, die

(i) zu den Parameter $(0, \sigma^2)$ normal- bzw.

(ii) zu dem Parameter $k > 0$ Pareto-

verteilt ist. Die Pareto Verteilung zum Parameter $k > 0$ ist die Verteilung auf $\mathbb{R}$ mit Dichte

$$f(x) = k\left(\frac{1}{x}\right)^{k+1} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$$

Sie wird sehr oft in der Versicherungsmathematik verwendet.
Berechnen Sie jeweils $E[|X|]$. Bestimmen Sie ferner jeweils alle $t \geq 0$, für die $E[X^t]$ existiert und berechnen Sie diese im Falle ihrer Existenz.
Bemerkung: $E[X^t]$ heißt auch *t-tes Moment* der Verteilung von X.

Aufgabe H3

k Kinder versuchen n Christbaumkerzen gleichzeitig auszublasen. Jedes Kind wählt unabhängig von den anderen zufällig und gleichverteilt eine der n Kerzen aus und schafft es diese mit Wahrscheinlichkeit $p \in [0, 1]$ auszublasen. Wieviele Kerzen bleiben im Mittel brennen? Berechnen Sie diesen Erwartungswert!

Aufgabe H4

Sei $E := \{e = \{x,y\} \mid x, y \in \mathbb{Z}^2, \|x-y\|_2 = 1\}$ die Menge aller Kanten des zweidimensionalen Quadratgitters. Wir betrachten Kanten-Perkolation auf $\mathbb{Z}^2$, also folgendes Modell: Sei $p \in [0,1]$. Jede Kante $e \in E$ wird unabhängig von allen anderen mit Wahrscheinlichkeit p blau gefärbt. Das ergibt folgendes Wahrscheinlichkeitsmodell:

$$\Omega = \{0,1\}^E \quad \mathcal{F} = \bigotimes_{e\in E} \mathcal{P}(0,1) \quad \mathbb{P}_p = \bigotimes_{e\in E} \mathrm{Ber}(p)\,.$$

Wir untersuchen blaue Cluster, also zusammenhängende Kanten, die alle blau gefärbt sind. Sei A das Ereignis, dass ein unendlich großer Cluster existiert.

(i) Zeigen Sie: Für alle $p \in [0,1]$ gilt $\mathbb{P}_p[A] \in \{0,1\}$.

(ii) Zeigen Sie: $\mathbb{P}_0[A] = 0$ und $P_1[A] = 1$.

(iii) Definieren Sie auf dem Wahrscheinlichkeitsraum

$$\tilde{\Omega} = [0,1]^E \quad \tilde{\mathcal{F}} = \bigotimes_{e\in E} \mathcal{B}([0,1]) \quad \tilde{\mathbb{P}} = \bigotimes_{e\in E} \mathcal{U}([0,1])$$

für jedes $p \in [0,1]$ eine Zufallsvariable $Z_p : \tilde{\Omega} \to \Omega$, so dass die Verteilung von Z_p unter $\tilde{\mathbb{P}}$ gerade $\mathbb{P}_p$ ist, und so dass für jedes $e \in E$ die Funktion $[0,1] \to \{0,1\}$, $p \mapsto (Z_p)_e$, monoton ist.

(iv) Folgern Sie, dass die Funktion $p \mapsto \mathbb{P}_p[A]$ monoton ist.

(v) Folgern Sie, dass es eine so genannte kritische Wahrscheinlichkeit $p_c \in [0,1]$ gibt, so dass gilt: $\mathbb{P}_p[A] = 0$ für $p < p_c$ und $\mathbb{P}_p[A] = 1$ für $p > p_c$.

Bemerkungen: Es gilt $p_c = 0.5$ und $\mathbb{P}_{p_c}[A] = 0$. In Dimension $d \geq 3$ ist jedoch der Wert von p_c unbekannt und für $3 \leq d \leq 14$ ist es ein bedeutendes offenes Problem, ob $\mathbb{P}_{p_c}[A] = 0$ gilt.

Abgabe der Hausaufgaben bis 20.10.2013, 12:15 Uhr, in den Übungskasten