Mathematisches Institut der Universität München	**Stochastik** **Übungsblatt 6**	Prof. Dr. Holger Kösters WS 2014/15

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

(i) Sei $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ eine normalverteilte Zufallsvariable und seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$. Berechnen Sie die Verteilung der Zufallsvariablen $aX + b$.

(ii) Sei nun X eine standardnormalverteilte Zufallsvariable, d.h. $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Berechnen Sie die Dichte von X^2.
Hinweis: Betrachten Sie die Verteilungsfunktion Φ von X. Es ist nicht nötig – und sogar unmöglich – $\Phi(x)$ als geschlossene Formel ohne Integral auszurechnen.

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Die Gammafunktion $\Gamma : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ und die Betafuntion $B : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sind durch

$$\Gamma(r) := \int_0^\infty x^{r-1} e^{-x}\, dx \quad (r > 0) \qquad \text{bzw.} \qquad B(a,b) := \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\, dx \quad (a, b > 0)$$

gegeben. Es besteht folgender Zusammenhang zwischen diesen Funktionen: Für $a, b > 0$ gilt

$$\Gamma(a+b)B(a,b) = \Gamma(a)\Gamma(b)\,.$$

Ferner gilt $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ und $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ für alle $x > 0$.
Die Gammaverteilung $\Gamma_{\lambda,r}$ mit Skalenparameter $\lambda > 0$ und Formparameter $r > 0$ ist definiert als das Maß mit Dichte

$$\gamma_{\lambda,r}(x) \;=\; \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$$

für $x \in \mathbb{R}$.

(i) Zeigen Sie, dass $\Gamma_{\lambda,r}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

(ii) Seien $X \sim \Gamma_{\lambda,r}$ und $Y \sim \Gamma_{\lambda,s}$ unabhängige Zufallsvariablen. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

(iii) Seien $X_1, \ldots, X_n$ zum Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt und unabhängig. Bestimmen Sie die Verteilung von $X_1 + \ldots + X_n$.

(iv) Seien nun $X_1, \ldots, X_n$ standardnormalverteilt und unabhängig. Bestimmen Sie die Dichte der Verteilung von $X_1^2 + \ldots + X_n^2$. Diese Verteilung heißt χ^2-*Verteilung mit n Freiheitsgraden.*
Hinweis: Aufgabe T1(ii).

Aufgabe H2

Sei X eine Binominal(n,p)-verteilte Zufallsvariable und Y eine Binominal(m,p)-verteilte Zufallsvariable, die von X unabhängig ist (mit $p \in [0,1], n, m \in \mathbb{N}$).
Zeigen Sie mit der Faltungsformel aus Augabe H2 von Blatt 5, dass $Z := X + Y$ eine Binominal$(n+m,p)$-verteilte Zufallsvariable ist.

Aufgabe H3

Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable und Y eine von X unabhängige $\mathcal{N}(\nu, \tau^2)$-verteilte Zufallsvariable (mit $\mu, \nu \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2, \tau^2 > 0$).

Zeigen Sie, dass $Z := X + Y$ eine $\mathcal{N}(\mu + \nu, \sigma^2 + \tau^2)$-verteilte Zufallsvariable ist.
Hinweis: Einfacher ist es, wenn Sie zunächst den Fall $\mu = \nu = 0$ betrachten.

Aufgabe H4

Ein cleverer Student möchte gerne die Angabe der Stochastikklausur kennen. Dazu drückt er wiederholt, zufällig und unabhängig voneinander eine beliebige Taste oder Tastenkombination (wie AltGr+Q) einer Computertastatur. Um die Taste oder Tastenkombination auszuwählen, verwendet er eine beliebige (aber "clever" gewählte) Verteilung, wobei jede Taste und Tastenkombination positive Wahrscheinlichkeit haben solle. Es ist bekannt, dass die Angabe nur beschränkt viele Zeichen enthalten kann.
Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die so erhaltene (unendliche) Zeichenfolge die Angabe der Stochastikklausur unendlich oft enthält (wobei Formeln in LaTeX-Schreibweise angegeben werden).

Abgabe der Hausaufgaben bis 24.11.2014, 12:15 Uhr, in den Übungskasten