Mathematisches Institut
der Universität München

Stochastik
Übungsblatt 5

Prof. Dr. Holger Kösters
WS 2014/15

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Seien $n, N \in \mathbb{N}$. In einer Urne befinden sich N Kugeln mit den Nummern $1, \dots, N$. Wir ziehen aus der Urne n-mal eine Kugel
(a) mit Zurücklegen *bzw.*
(b) ohne Zurücklegen.
Für $i = 1, \dots, n$ sei X_i die Nummer bei der i-ten Ziehung.

(i) Definieren Sie im Fall (a) $X_1, \dots, X_n$ als Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und untersuchen Sie, ob $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind.

(ii) Definieren Sie im Fall (b) $X_1, \dots, X_n$ als Zufallsvariablen auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ und untersuchen Sie, ob $X_1, \dots, X_n$ unabhängig sind.

(iii) Bestimmen Sie im Fall (a) die Verteilung von $X_1, \dots, X_n$. Sei nun Y die größte gezogene Nummer. Definieren Sie Y als Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und bestimmen Sie die Verteilungsfunktion sowie die Zähldichte von Y.

Hausaufgaben

Aufgabe H1 *Kausale vs. stochastische Unabhängigkeit*

(i) Ein roter und ein blauer Würfel werde einmal geworfen. Sei A das Ereignis "Die Augensumme ist 7" und B das Ereignis "Der rote Würfel zeigt 3 Augen". Bestimmen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, interpretieren Sie ein Ergebnis, definieren Sie die Ereignisse A und B formal und untersuchen Sie diese Ereignisse auf Unabhängigkeit.

(ii) Ein Würfel werde (abzählbar) unendlich oft geworfen. Sei Z_k die im k-ten Wurf geworfene Augenzahl. Bestimmen Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, interpretieren Sie ein Ergebnis und definieren Sie die Zufallsvariablen Z_k, $k \in \mathbb{N}$ formal.
Für $n \in \mathbb{N}$ sei nun $X_n : (\Omega, \mathcal{F}) \to \big(\{0,1,2,3,4,5\}, \mathcal{P}(\{0,1,2,3,4,5\}\big)$ durch

$$X_n := \sum_{k=1}^{n} Z_k \bmod 6$$

gegeben. Untersuchen Sie die Familie $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Unabhängigkeit.

Aufgabe H2 *Diskrete Faltung*

(i) Seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{Z}$ und Zähldichten ρ_X bzw. ρ_Y. Zeigen Sie, dass $X + Y$ dann die Zähldichte

$$\rho(z) := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \rho_X(m) \rho_Y(z - m), \qquad z \in \mathbb{Z},$$

hat.

(ii) Seien nun X und Y unabhängig poissonverteilt zum Parameter $\lambda > 0$ bzw. $\mu > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $X + Y$.

(iii) Sei $s \in \mathbb{N}_0$ fest. Bestimmen Sie in der Situation von (ii) die Verteilung von X gegeben $X + Y = s$.

Aufgabe H3 *Minima und Maxima*

(i) Seien $X_1, \ldots, X_n$ reellwertige Zufallsvariablen (wobei die reellen Zahlen mit der Borelschen σ-Algebra versehen seien). Zeigen Sie, dass dann auch $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ und $\max\{X_1, \ldots, X_n\}$ Zufallsvariablen sind.

(ii) Seien nun $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig und für $i = 1, \ldots, n$ sei X_i exponentialverteilt zum Parameter $\alpha_i > 0$. Bestimmen Sie die Verteilung von $\min\{X_1, \ldots, X_n\}$ sowie die Dichte der Verteilung von $\max\{X_1, X_2\}$.

Aufgabe H4 *Konstruktion von Zufallsvariablen mit gegebener Verteilung*

(i) Sei $p \in [0, \frac{1}{2}]$. Definieren Sie auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $\big([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \mathcal{U}([0,1])\big)$ Zufallsvariablen X und Y so, dass gilt:
  (1) X und Y sind Bernoulli($\frac{1}{2}$)-verteilt
  (2) $P[X = 1, Y = 1] = p$

(ii) Sind X und Y unabhängig?

(iii) Definieren Sie nun weiter eine Zufallsvariable Z so, dass Z Exp(1)-verteilt und von X unabhängig ist. Ist es sogar möglich, dass X, Y und Z unabhängig sind?

Abgabe der Hausaufgaben bis 17.11.2014, 12:15 Uhr, in den Übungskasten