

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Sei $n \in \mathbb{N}$. Eine faire Münze werde geworfen, bis zum ersten Mal „Kopf“ fällt, maximal aber n -mal. Es sei Y die Anzahl der Würfe. Definieren Sie Y als Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ und bestimmen Sie die Zähldichte sowie die Verteilungsfunktion von Y . Bestimmen Sie ferner die Verteilung von Y bedingt auf das Ereignis, dass beim ersten Wurf „Zahl“ gefallen ist.

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Sei F die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes \mathbb{P} auf $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Zeigen Sie:

- (i) F ist monoton wachsend
- (ii) F ist rechtsseitig stetig
- (iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$

Bestimmen und skizzieren Sie ferner die Verteilungsfunktionen der Binomialverteilung mit Parametern $n = 3$ und $p = 0.8$ sowie der Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda = 1$.

Aufgabe H2

Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung. Sei T eine $]0, \infty[$ -wertige Zufallsvariable mit der Eigenschaft $G_T(t) := P(T > t) > 0$ für alle $t > 0$. Zeigen Sie Äquivalenz der Aussagen

- (i) T ist exponentialverteilt zu einem Parameter $\alpha > 0$.
- (ii) $P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s)$ für alle $s, t > 0$.
- (iii) Es gibt ein $\alpha > 0$, so dass $G_T(t) = e^{-\alpha t}$ für alle $t > 0$.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass eine monotone Funktion $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ mit $h(t + s) = h(t) + h(s)$ für alle $s, t \in \mathbb{R}^+$ bereits linear ist.

Aufgabe H3

- (i) Sei U eine auf $(0, 1)$ gleichverteilte Zufallsvariable. Berechnen Sie die Verteilung von $X := -\log(1 - U)$.
- (ii) Im Abstand $a > 0$ über einer Geraden befindet sich eine Glühbirne. Diese strahlt gleichmäßig in alle Richtungen, die die Gerade irgendwann treffen. Y bezeichne den Auftreffpunkt eines Lichtstrahls auf der Geraden. Bestimmen Sie die Verteilung von Y .

Aufgabe H4

Vier internationale Großfabrikanten von Gummienten beliefern den Badeartikelladen Ihres Vertrauens und haben einen gleichgroßen Anteil an den verkauften Enten. Bei einer Untersuchung stellte sich heraus, dass sich 6% der Gummienten, die vom Unternehmen A hergestellt wurden, nicht aufrecht über Wasser halten können. Beim Unternehmen B beträgt dieser Anteil 8%, beim Unternehmen C 12% und beim Unternehmen D sogar 14%.

- (i) Sie kaufen in dem Laden eine Ente. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie eine aufrecht schwimmende Ente bekommen?
- (ii) Leider schwimmt Ihre Ente nur mit Schlagseite (also nicht aufrecht). Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Ente von Unternehmen C produziert wurde?

Abgabe der Hausaufgaben bis 10.11.2014, 12:15 Uhr, in den Übungskasten