Stochastik
Übungsblatt 2

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Wir untersuchen die Geburtstage (ohne Jahr) von n Studierenden Ihres Tutoriums. Vereinfachend nehmen wir an, dass keiner am 29. Februar Geburtstag hat, ansonsten aber alle Tage gleich wahrscheinlich sind.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, und interpretieren Sie die Bedeutung eines Ergebnisses $\omega \in \Omega$.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass keine Person im Mai Geburtstag hat.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass jemand am selben Tag wie Sie Geburtstag hat.

(iv) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben.

(v) Leiten Sie unter Verwendung der Näherung $\log(1+x) \approx x$ für $x \to 0$ eine Näherungsformel für die Wahrscheinlichkeit aus (iv) her.

Welche Werte ergeben sich, wenn Sie für n die tatsächliche Anzahl der Studierenden ihres Tutoriums beziehungsweise $n = 23$ einsetzen? Treten die Ereignisse in Ihrem Tutoriums ein?

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Geben Sie für folgende Modelle einen geeigneten Ergebnisraum Ω an und interpretieren Sie jedes Ergebnis $\omega \in \Omega$. Bestimmen Sie ferner die Mächtigkeit von Ω.

(i) Es werden s Stückchen Vollmilchschokolade und w Stückchen weißer Schokolade auf t unterscheidbare Teller verteilt. Dabei können auf einen Teller kein oder auch mehrere Stückchen gelegt werden. Die einzelnen Stückchen Vollmilchschokolade bzw. weißer Schokolade können nicht unterschieden werden.

(ii) Eine Kfz-Versicherung hat n Kunden. Modellieren Sie die Gesamtheit aller Schadensfälle in einer Woche, wenn pro Kunde nur ein Schaden vorkommen kann. Dabei soll für jeden Schaden folgende Informationen festgehalten werden: Kunde, Wochentag, Schadenssumme (in Euro). Wie verändert sich das Modell, wenn jeder Kunde beliebig viele Schadensfälle verursachen kann?

(iii) Peter hat einen roten und einen blauen Würfel. Er wirft zunächst den roten Würfel einmal und anschließend den blauen Würfel so oft, wie der rote Würfel Augen zeigt.

Aufgabe H2

Beim Wichteln schreiben n Personen ihren Namen auf jeweils einen Zettel. Anschließend werden die Zettel gut gemischt und zufällig auf die n Personen verteilt. Nun muss man der Person, deren Zettel man erhalten hat, ein Geschenk machen.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, und interpretieren Sie die Bedeutung eines Ergebnisses $\omega \in \Omega$.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit q_n, dass Sie sich selbst beschenken müssen.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p_n, dass irgendeine Person sich selbst beschenken muss.

(iv) Bestimmen Sie Grenzwerte von q_n und p_n im Limes $n \to \infty$.

Aufgabe H3

In einem Pokerspiel bekommen Sie eine Hand von 5 (aus 4×13) Karten.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, und interpretieren Sie die Bedeutung eines Ergebnisses $\omega \in \Omega$.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie einen Drilling erhalten, der weder Teil eines Vierlings noch eines Full House (Drilling + Paar) ist.

(iii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass Sie ein Full House erhalten.

Hinweis: Binominalkoeffizenten (und vieles mehr) können Sie auf www.wolframalpha.com berechnen.

Aufgabe H4

Eine Fluggesellschaft weiß aus langjähriger Erfahrung, dass Passagiere mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% ihren Flug nicht antreten. Deshalb überbucht sie ihre Flugzeuge regelmäßig. In einem konkreten Fall verkauft sie für ein Flugzeug mit 97 Plätzen 100 Tickets.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der dieses Zufallsexperiment beschreibt, und interpretieren Sie die Bedeutung eines Ergebnisses $\omega \in \Omega$.

(ii) Formulieren Sie formal das Ereignis, das die Plätze im Flugzeug für alle Passagiere ausreichen, und berechnen Sie dessen Wahrscheinlichkeit exakt sowie mit Hilfe der Poisson-Approximation.

Hinweis: Die Formulierung der Aufgabe ist bewusst etwas vage. Es ist nämlich auch wichtig, das Zufallsexperiment zu erkennen, das einem Sachverhalt zugrunde liegt.

Abgabe der Hausaufgaben bis 27.10.2013, 12:15 Uhr, in den Übungskasten