Stochastik Übungsblatt 1

Prof. Dr. Holger Kösters

Tutoraufgaben

Aufgabe T1

Ein fairer Würfel werde dreimal geworfen.

(i) Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an, der dieses Zufallsexperiment beschreibt und interpretieren Sie ein Ergebnis $\omega \in \Omega$.

(ii) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit für die Ereignisse $A =$ „die Augensumme ist 11“ und $B =$ „die Augensumme ist 12“.

(iii) Ein gewisser Chevalier de Mere, der mit seinen Spielproblemen und deren Lösungen durch Pascal in die Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie eingegangen ist, wundert sich einmal Pascal gegenüber, dass er beim Werfen mit 3 Würfeln die Augensumme 11 häufiger beobachtet hatte als die Augensumme 12, obwohl doch beiden Augensummen durch sechs Würfel-Kombinationen erzeugt werden, nämlich

$$11 = 6+4+1 = 6+3+2 = 5+5+1 = 5+4+2 = 5+3+3 = 4+4+3,$$
$$12 = 6+5+1 = 6+4+2 = 6+3+3 = 5+5+2 = 5+4+3 = 4+4+4.$$

Kann man die Beobachtung des Chevalier de Mere als “vom Zufall bedingt” ansehen oder steckt in seiner Argumentation ein Fehler?

Hausaufgaben

Aufgabe H1

Sei $n \in \{2, 3, \ldots\}$. Zwei unterscheidbare Würfel werden n-mal hintereinander jeweils gleichzeitig geworfen. Geben Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum für dieses Zufallsexperiment an, interpretieren Sie ein Ergebnis $\omega \in \Omega$ und berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit der folgenden Ereignisse:

$A =$ „genau zweimal sind die beiden gewürfelten Zahlen gleich“;

$B =$ „es sind insgesamt mindestens drei verschiedene Augenzahlen gefallen“.

Aufgabe H2

Ein Würfel mit den Augenzahlen $1, 2, 3, 4, 5, 6$ sei so manipuliert, dass die geraden Werte untereinander gleich wahrscheinlich sind, die ungeraden Werte untereinander gleich wahrscheinlich sind und 2 doppelt so wahrscheinlich wie 1 ist. Stellen Sie ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmodell auf, interpretieren Sie ein Ergebnis $\omega \in \Omega$ und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass bei einmaligem Würfeln die Augenzahl höchstens 3 ist.

Aufgabe H3

Beweisen Sie die **Einschluss-/Ausschlussformel**: Ist $n \in \mathbb{N}$ und sind $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse, so gilt

$$P(A_1 \cup \ldots \cup A_n) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} P(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}).$$

Aufgabe H4

Vor Simone stehen drei Urnen mit jeweils zehn von 1 bis 10 durchnummerierten Kugeln. Sie zieht aus jeder Urne eine Kugel, merkt sie sich und legt sie zurück. Nun zieht sie nochmal aus jeder Urne eine Kugel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim zweiten Ziehen

(i) die selben Kugeln

(ii) die gleichen Zahlen

gezogen werden? Geben Sie bei Ihren Antworten zuerst einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum an und interpretieren Sie ein Ergebnis $\omega \in \Omega$.