Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 2

Wir folgen dem Beweis von Satz 3.49 im Analysis 1 Skript.
Es sei $\varepsilon > 0$. Weil f stetig ist, können wir zu jedem $z \in M$ ein $\delta(z, \varepsilon) > 0$ wählen, sodass

$$f(U_{\delta(z,\varepsilon)}(z)) \subseteq U_{\varepsilon/2}(f(z)).$$

Nun ist $(U_{\delta(z,\varepsilon)/2}(z))_{z\in M}$ eine offene Überdeckung von M. Weil M kompakt ist, hat sie eine endliche Teilüberdeckung $(U_{\delta(z,\varepsilon)/2}(z))_{z\in E}$. Wir setzen

$$\delta = \frac{1}{2} \min_{z\in E} \delta(z, \varepsilon) > 0.$$

Nun seien $x, y \in M$ mit $d_M(x, y) < \delta$. Dann gibt es $z \in E$ mit $x \in U_{\delta(z,\varepsilon)/2}(z)$. Es folgt einerseits $x \in U_{\delta(z,\varepsilon)}(z)$, also

$$d_N(f(x), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2},$$

und andererseits

$$d_M(y, z) \leq d_M(y, x) + d_M(x, z) < \delta + \frac{\delta(z, \varepsilon)}{2} \leq \frac{\delta(z, \varepsilon)}{2} + \frac{\delta(z, \varepsilon)}{2} = \delta(z, \varepsilon)$$

also $d_N(f(x), f(y)) < \frac{\varepsilon}{2}$ wegen der Wahl von $\delta(z, \varepsilon)$. Zusammen:

$$d_N(f(x), f(y)) \leq d_N(f(x), f(y)) + d_N(f(y), f(z)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Aufgabe 3

Sei $\varepsilon > 0$. Wir müssen eine endliche Menge $E \subseteq M$ finden, sodass

$$\bigcup_{x\in E} U_\varepsilon(x) = M.$$

Die Halbmetrik auf M ist gegeben durch die Produkthalbmetrik. Da die $M_i, i = 1, ..., n$ totalbeschränkt sind gibt es $E_i \subseteq M_i, |E|_i < \infty$, sodass

$$\bigcup_{x\in E_i} U_\varepsilon(x) = M_i.$$

Setze $E = E_1 \times ... \times E_n \subseteq M$. Klar ist, dass $|E| < \infty$. Sei $y = (y_1, ..., y_n) \in M$. Dann existiert für alle $i = 1, ..., n$ ein $x_i \in E_i$ mit $y_i \in U_\varepsilon(x_i)$. Sei $x = (x_1, ..., x_n)$. Es ist offensichtlich, dass $x \in E$ gilt. Weiter ist $y \in U_\varepsilon(x)$, da $d(x, y) = \max_{i=1,...,n} \{d(x_i, y_i)\} \leq \varepsilon$ nach Wahl von x. Somit ist

$$\bigcup_{x\in E} U_\varepsilon(x) = M.$$

Aufgabe 4

(a) Wir benutzen die komplexe Version den Satzes von Stone-Weierstraß (T9.2). Wir bemerken, dass die abgeschlossene Einheitskreisscheibe B kompakt ist und die Polynomfunktionen von z und $\overline{z}$ stetig auf B sind. Somit müssen wir noch die Punkte (a) bis (f) überprüfen.

(a) $1 \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$ für $a_{0,0} = 1$ und $a_{k,l} = 0, k \neq 0 \neq l$.

(b) Sei $f, g \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$. Seien $a_{k,l}$ die Koeffizienten von f und $b_{k,l}$ die Koeffizienten von g. Dann hat $f+g$ die Koeffizienten $c_{k,l} = a_{k,l} + b_{k,l}$. Da nur endliche viele der $a_{k,l}, b_{k,l}$ ungleich 0 sind, sind auch nur endliche viele der $c_{k,l}$ ungleich 0. Damit ist $f+g$ wieder in $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$.

(c) Sei $f, \in \mathbb{C}[z, \overline{z}], \alpha \in \mathbb{C}$. Seien $a_{k,l}$ die Koeffizienten von f. Dann hat αf die Koeffizienten $c_{k,l} = \alpha \cdot a_{k,l}$. Da nur endliche viele der $a_{k,l}$ ungleich 0 sind, sind auch nur endliche viele der $c_{k,l}$ ungleich 0. Damit ist αf wieder in $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$.

(d) Sei $f, g \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$. Seien $a_{o,p}$ die Koeffizienten von f und $b_{m,n}$ die Koeffizienten von g. Dann hat $f \cdot g$ die Koeffizienten $c_{k,l} = \sum\limits_{o+m=k, p+n=l} a_{o,p} \cdot b_{m,n}$. Da nur endliche viele der $a_{o,p}, b_{m,n}$ ungleich 0 sind, sind auch nur endliche viele der $c_{k,l}$ ungleich 0. Damit ist $f \cdot g$ wieder in $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$.

(e) Sei $f \in \mathbb{C}[z, \overline{z}]$. Seien $a_{k,l}$ die Koeffizienten von f. Dann hat $\overline{f}$ die Koeffizienten $c_{k,l} = \overline{a_{l,k}}$. Da nur endliche viele der $a_{k,l}$ ungleich 0 sind, sind auch nur endliche viele der $c_{k,l}$ ungleich 0. Damit ist $\overline{f}$ wieder in $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$.

(f) Seien $x, y \in B, x \neq y$. Dann ist $id : B \to \mathbb{C}, id(z) = z$ in $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ und es gilt $id(x) = x \neq y = id(y)$. Damit ist $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ punktetrennend.

Wie können also den Satz von Stone-Weierstraß in seiner komplexen Version anwenden um bekommen, dass $\mathbb{C}[z, \overline{z}]$ dicht in $(C(B, \mathbb{C}), \| \cdot \|_\infty)$ ist.

(b) Wir zeigen zuerst den Hinweis. Sei also L wie in der Aufgabenstellung definiert. L ist offensichtlich linear, da das Integral linear ist. Wir zeigen nun, dass L stetig ist.
Seien $\varepsilon > 0$ und $f, g \in C(B, \mathbb{C})$ mit $\|f - g\|_\infty = \max\limits_{x \in B} \{|f(x) - g(x)|\} < \frac{\varepsilon}{2}$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned} |L(f) - L(g)| = |L(f-g)| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} (f-g)(e^{ix}) \, \mathrm{d}x - (f-g)(0) \right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |(f-g)(e^{ix})| \, \mathrm{d}x + |(f-g)(0)| < \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \frac{\varepsilon}{2} \, \mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Somit ist L eine stetige Linearform.
Sei $f = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k \in \mathbb{C}[z], m \in \mathbb{N}_0, a_k \in \mathbb{C}$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{ix}) \, \mathrm{d}x = f(0),$$

da $\int\limits_0^{2\pi} e^{ikx} \, \mathrm{d}x = 0 \; \forall \; k \in \mathbb{N}$. Folglich ist $L(f) = 0$.
Weiter sei $g : B \to \mathbb{C}, g(z) = z\overline{z}$. Dann ist

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} g(e^{ix}) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} e^{ix} e^{-ix} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}x = 1$$

und somit ist auch $L(g) = 1$, da $g(0) = 0$.
Angenommen $\mathbb{C}[z]$ wäre dicht in $C(B, \mathbb{C})$. Jetzt haben wir jedoch eine stetige Funktion, die auf der dichten Teilmenge $\mathbb{C}[z]$ konstant 0 ist, aber nicht die Nullfunktion ist. Das ist ein Widerspruch nach T6.4. Daher kann $\mathbb{C}[z]$ nicht dicht in $C(B, \mathbb{C})$ sein.

Aufgabe 5

Mit $f(x) = \begin{cases} x & 0 \le x \le \pi \\ 2\pi - x & \pi \le x \le 2\pi \end{cases}$ erhalten wir $\forall\ n$:

$$\int_0^{2\pi} \sin(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = 0,$$

weil $\sin(\pi - nx) = -\sin(\pi + nx)$. Für $n \neq 0$ gilt: (weil $\cos(\pi - nx) = \cos(\pi + nx)$)

$$\int_0^{2\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} \cos(nx) f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x = 2\left(\frac{1}{n} x\sin(x) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right)\Bigg|_0^{\pi}$$
$$= \begin{cases} -\frac{4}{n^2} & \text{n ungerade} \\ 0 & \text{n gerade} \end{cases}.$$

Also $\langle f, e^{inx}\rangle = \begin{cases} -\frac{2}{\pi n^2} & \text{n ungerade} \\ 0 & \text{n gerade}, \neq 0 \end{cases}$ und $\langle f, e^0\rangle = \frac{\pi}{2}$. Die Fourierkoeffizienten von f sind somit

$$\left(\langle f, e^{inx}\rangle\right) = ...0, \frac{-2}{\pi}, \underbrace{\frac{\pi}{2}}_{n=0}, \underbrace{\frac{-2}{\pi}}_{n=1}, 0, \frac{-2}{\pi 3^2}, 0...$$

und

$$\left(|\langle f, e^{inx}\rangle|^2\right) = ...0, \frac{4}{\pi^2}, \frac{\pi^2}{4}, \frac{4}{\pi^2}, 0, \frac{4}{\pi^2 3^4}, 0...$$

Andererseits gilt

$$\langle f, f\rangle = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi^3 \cdot \frac{1}{2\pi}.$$

Parseval liefert

$$\frac{1}{3}\pi^2 = \langle f, f\rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\langle f, e^{inx}\rangle|^2 = \frac{\pi^2}{4} + \frac{8}{\pi^2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4}.$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{\pi^2}{12}\frac{\pi^2}{8} = \frac{\pi^4}{96}.$$

Weiter gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{16}{15}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^4} = \frac{16}{15}\frac{\pi^2}{96} = \frac{\pi^4}{90}$$

Aufgabe 6

Aufgrund der Periodizität von f genügt es, die Aussage für f eingeschränkt auf $[0, 2\pi]$ zu zeigen. Die Fourier-Analyse $\mathcal{F}$ aus Definition 1.191 der Vorlesung, die f ihre Fourierkoeffizienten

$f_k = \langle e_k, f\rangle$ zuordnet, d.h. $\mathcal{F}(f) = (\langle e_k, f\rangle)_{k\in\mathbb{N}}$, ist nach Satz 1.192 eine Bijektion. Hierbei wurde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ definiert durch

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \overline{f(x)}g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Es gilt $f = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} \langle e_k, f\rangle e_k$, wobei die Konvergenz der Reihe in $(L^2([0,2\pi]), \|\cdot\|_2)$ zu verstehen ist. Wir wollen zeigen, dass die Reihe sogar gleichmäßig gegen f konvergiert. Angenommen, die Folge $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ in $C([0,2\pi])$, definiert durch

$$S_m(x) = \sum_{k=-m}^{m} f_k e_k(x) = \sum_{k=-m}^{m} \langle e_k, f\rangle e_k(x),$$

konvergiert für $m\to\infty$ gleichmäßig gegen ein $g\in L^2([0,2\pi])$, also $\|S_m - g\|_\infty \to 0$. Wegen $\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|S_m(x)-g(x)|^2 \leq \|S_m - g\|_\infty$ konvergiert S_m dann auch in $(L^2, \|\cdot\|_2)$ gegen g. Aufgrund der Eindeutigkeit des Grenzwertes ($\|f-g\|_2 \leq \|f - S_m\|_2 + \|S_m - g\|_2$) gilt in diesem Fall also $f = g$. Aus der gleichmäßigen Konvergenz der Partialsummen S_m folgt somit bereits die gleichmäßige Konvergenz gegen f.

Beweis der gleichmäßigen Konvergenz der S_m. Zeigen wir zunächst $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}|\langle e_k, f\rangle| < \infty$. Wegen $f\in C^1(\mathbb{R})$, folgt mittels partieller Integration für $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$,

$$\langle e_k, f\rangle = -\frac{e^{ikx}f(x)}{2\pi ik}\Bigg|_{x=0}^{x=2\pi} + \frac{1}{2\pi ik}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ikx}f'(x)\,\mathrm{d}x.$$

Also $|\langle e_k, f\rangle| = \frac{1}{k}|\langle e_k, f'\rangle|$, da $f(2\pi) = f(0)$. Die Cauchy-Schwarz Ungleichung liefert

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\langle e_k, f\rangle| \leq \left(2\sum_{k\in\mathbb{N}} k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |\langle e_k, f'\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\|f'\|_2 < \infty,$$

wobei wir im letzten Schritt $C := 2\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} k^{-2} < \infty$ gesetzt haben und die Besselsche Ungleichung für f' benutzt haben. Es folgt

$$\left|S_m(x) - \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle e_k, f\rangle e_k(s)\right| \leq \sum_{|k|>m} |\langle e_k, f\rangle| \overset{m\to\infty}{\to} 0.$$

Da die rechte Seite nicht von x abhängt, konvergiert $(S_m)_{m\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig.