Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Sei (M,d) ein metrischer Raum und $B \subseteq M$ eine totalbeschränkte Menge. Aufgrund der Totalbeschränktheit gibt es eine endliche Anzahl von Punkten $E \subseteq M$, sodass

$$B \subseteq \bigcup_{x \in E} U_1^d(x) \tag{1}$$

erfüllt ist. Seien $x, y \in B$ gegeben, dann gibt es $a, b \in E$ mit $x \in U_1(a), y \in U_1(b)$ und es folgt

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,b) + d(b,y) < 2 + \sup_{e,e' \in E} d(e,e') = 2 + \max_{e,e' \in E} d(e,e') < \infty. \tag{2}$$

Daraus ergibt sich also für ein $a \in E$

$$B \subseteq \{y \in M \mid d(a,y) \leq 2 + \max_{e,e' \in E} d(e,e')\}. \tag{3}$$

$\square$

Aufgabe 2

Es sei $M := \{f \in C([0,1],\mathbb{R}) \mid \|f\|_\infty \leq 1, \forall x,y \in [0,1] : |f(x)-f(y)| \leq |x-y|\}$. Es ist zu zeigen, dass M abgeschlossen und totalbeschränkt ist. Wir zeigen Abgeschlossenheit durch Offenheit des Komplements. Sei also $f \in M^c$ gegeben, dann gibt es zwei Fälle

a) Es gilt $\|f\|_\infty > 1$, in diesem Fall gilt $\delta := \|f\|_\infty - 1 > 0$ und es folgt mit der Dreiecksungleichung $U_\delta^{\|\cdot\|_\infty}(f) \subseteq M^c$.

b) Es gilt $\|f\|_\infty \leq 1$ und

$$\exists x,y \in [0,1] : |f(x)-f(y)| > |x-y|. \tag{4}$$

Wähle $x', y' \in [0,1]$ sodass (4) für diese Argumente erfüllt ist. Definiere $\delta := |f(x') - f(y')| - |x'-y'| > 0$, dann folgt für alle $g \in U_{\delta/3}^{\|\cdot\|_\infty}(f)$

$$\begin{aligned}
|g(x')-g(y')| - |x'-y'| &= |g(x') - f(x') + f(x') - f(y') + f(y') - g(y')| - |x'-y'| \\
&\geq |f(x')-f(y')| - |g(x')-f(x')+f(y')-g(y')| - |x'-y'| \\
&\geq |f(x')-f(y')| - |g(x')-f(x')| - |f(y')-g(y')| - |x'-y'| \\
&\geq |f(x')-f(y')| - |x'-y'| - \frac{2}{3}\delta = \delta\left(1 - \frac{2}{3}\right) = \frac{\delta}{3} > 0.
\end{aligned}$$

Also haben wir auch hier eine Umgebung von f gefunden welche $U_{\delta/3}^{\|\cdot\|_\infty}(f) \subseteq M^c$ erfüllt.

Es bleibt noch zu zeigen, dass M^c totalbeschränkt ist. Sei dazu $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren $N := \left\lfloor \frac{1}{3\varepsilon} \right\rfloor + 1$, $q := \frac{1}{N}$. Damit gilt $3q < \varepsilon$. Wir definieren außerdem die Funktion

$$\begin{aligned}
f_{(y_1, \ldots y_{2N})} &: [0,1] \to [-1,1] \qquad (5) \\
x &\mapsto \sum_{k=0}^{2N-1} 1_{x \in [kq/2,(k+1)q/2[} \left(y_k + \left(x - k\frac{q}{2}\right) 2N(y_{k+1} - y_k)\right) + y_{2N} 1_{x=1}, \qquad (6)
\end{aligned}$$

für $y_1, \dots, y_N \in [-1,1]$. Der Definition kann direkt abgelesen werden, dass für jedes $y \in [-1,1]^N$, die Funktion f_y stetig ist. Lipschitzstetigkeit mit Lipschitzkonstante kleiner oder gleich 1 folgt mit der Bedingung

$$\forall 0 \le k \le 2N-1 : |y_k - y_{k+1}| \le \frac{q}{2}. \tag{7}$$

Weiter definieren wir die Menge

$$E := \left\{ (y_1, \dots, y_N) \in \{-1, -1+\frac{q}{2}, \dots, 1\}^{2N} \mid |y_k - y_{k+1}| < q \right\}. \tag{8}$$

Behauptung. *Es gilt*

$$M \subseteq \bigcup_{z \in E} U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(f_z). \tag{9}$$

Beweis: Es sei $f \in M$ gegeben. Damit (9) gilt, ist zu zeigen, dass es ein $y \in E$ gibt mit $f \in U_\varepsilon^{\|\cdot\|_\infty}(f_y)$. Nach Definition von E gibt es ein $y \in E$ mit

$$\forall x \in \{0, q, \dots, 1\} : |f(x) - f_y(x)| < \frac{q}{2} < \frac{\varepsilon}{6}. \tag{10}$$

Es ist nur zu zeigen, dass sich diese Aussage (mit ein bisschen schlechterer Schranke) auf alle $x \in [0,1]$ verallgemeinern lässt. Wähle so ein f_y aus. Sei daher $x \in [0,1] \backslash \{0, \frac{q}{2}, \dots, 1\}$. Definiere $k := \frac{\lfloor x2N \rfloor}{2N} \in \{0, \frac{q}{2} \dots, 1\}$. Nun gilt nach Konstruktion und Wahl von y

$$|f(k) - f_y(k)| < \frac{q}{6} \wedge |f(k+1) - f_y(k+1)| < \frac{q}{6}. \tag{11}$$

Mit der Dreiecksungleichung und der Lipschitzstetigkeit von f folgt

$$\begin{aligned}
&|f(x) - f_y(x)| = \min_{b \in \{k,k+1\}} |f(x) - f(b) + f(b) - f_y(b) + f_y(b) - f_y(x)| \\
&\le \min_{b \in \{k,k+1\}} (|f(x) - f(b)| + |f(b) - f_y(b)| + |f_y(b) - f_y(x)|) \\
&\le \min_{b \in \{k,k+1\}} \left(1|x-b| + \frac{q}{6} + |x-b|2N|y_b - y_{b+1}|\right) \le \frac{q}{4} + \frac{q}{6} + \frac{q}{2} = q\frac{11}{12} < \varepsilon\frac{11}{36} < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Wobei in der ersten Ungleichung der letzten Zeile die Definition von f_y ausgenutzt wurde um die Differenz $|f_y(x) - f_y(b)|$ abzuschätzen. □

Aufgabe 3

a) Es seien f und f_n für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Einschränkung von f_n auf $\frac{k}{n} \le x \le \frac{k+1}{n}$ für alle $k \in \{1, \dots n-1\}$ ist stetig. Weil $[0,1] = \bigcup_{k \in \{1,\dots,n-1\}} [k/n, (k+1)/n]$ gilt und diese Intervalle alle abgeschlossen sind, gilt nach Aufgabe H5.1b) (mit direkter Verallgemeinerung auf endlich viele Faktoren), dass f_n stetig ist. Dabei ist wichtig, dass die stückweise Definitionen von f_n an den Rändern der Stücke übereinstimmen.

b) Weil f stetig ist und $[0,1]$ kompakt ist, ist f sogar gleichmäßig stetig. Sei für die Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_\infty$ ein $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle mit der gleichmäßigen Stetigkeit von f ein $\delta > 0$ mit

$$\forall x, y \in [0,1] : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{1}{3}\varepsilon. \tag{12}$$

Wähle $n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n} < \delta$, sei $x \in [0,1]$ und definiere $k := \lfloor xn \rfloor$, dann folgt

$$\begin{aligned}
|f(x) - f_n(x)| &\le \left|f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f_n\left(\frac{k}{n}\right)\right| + \left|f_n\left(\frac{k}{n}\right) - f_n(x)\right| && (13)\\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 0 + \left|f\left(\frac{k}{n}\right) - (nx-k)f\left(\frac{k+1}{n}\right) - (k+1-nx)f\left(\frac{k}{n}\right)\right| && (14)\\
&= \frac{\varepsilon}{3} + |nx-k| \left|f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon. && (15)
\end{aligned}$$

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir sollen also zeigen, dass es $(\beta_k)_{k\in\{0,1,\dots,n-1\}} \subseteq \mathbb{R}$ gibt, sodass

$$f_n(x) = \beta_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \beta_k \left| x - \frac{k}{n} \right| \tag{16}$$

erfüllt ist. Sowohl die linke Seite der Gleichung als auch die rechte Seite entspricht für alle möglichen Werte der β_k einer stetigen Funktion welche abschnittsweise durch Geraden definiert ist. Es reicht also aus an allen Grenzen der Abschnitte zu überprüfen ob die linke und rechte Seite übereinstimmen. Dies führt uns zu dem folgenden Gleichungssystem:

$$\begin{align}
f(0) &= \beta_0 + 0 + \frac{1}{n}\beta_2 + \dots + & \frac{n-2}{n}\beta_{n-1} + \frac{n-1}{n}\beta_n \tag{17}\\
f\left(\frac{1}{n}\right) &= \beta_0 + \frac{1}{n}\beta_1 + 0 + \frac{1}{n}\beta_3 + \dots + & \frac{n-3}{n}\beta_{n-1} + \frac{n-2}{n}\beta_n \tag{18}\\
f\left(\frac{2}{n}\right) &= \beta_0 + \frac{2}{n}\beta_1 + \frac{1}{n}\beta_2 + 0 + \frac{1}{n}\beta_4 + \dots + & \frac{n-4}{n}\beta_{n-1} + \frac{n-3}{n}\beta_n \tag{19}\\
\vdots\ &= \vdots \tag{20}\\
f\left(\frac{n-1}{n}\right) &= \beta_0 + \frac{n-1}{n}\beta_1 + \dots & \frac{1}{n}\beta_{n-1} + 0 \tag{21}\\
f(1) &= \beta_0 + \frac{n}{n}\beta_1 + & \dots \frac{2}{n}\beta_{n-1} + \dots \frac{1}{n}\beta_n \tag{22}\\
& \tag{23}
\end{align}$$

Es gilt also zu zeigen, dass dieses Gleichungssystem eine Lösung hat. Als Vorbereitung hierfür ziehen wir von jeder Gleichung ihren Vorgänger ab, Gleichung (17) lassen wir unverändert. Das lässt natürlich die Lösbarkeit unverändert, es ergibt sich in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \\ -1 & 1 & 0\dots & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & -1 & 1\dots & 0 & 0 & 0 & \\ & & & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots\dots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0\dots & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f\left(\frac{1}{n}\right) \\ f\left(\frac{2}{n}\right) \\ \\ \vdots \\ \\ f\left(\frac{n}{n}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{n} & & \dots & \frac{n-1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{-1}{n} & & \dots & -\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & -\frac{1}{n} & \dots & -\frac{1}{n} \\ & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ & & & & & \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & & \dots\frac{1}{n} & -\frac{1}{n} \\ 0 & \frac{1}{n} & \frac{1}{n} & & \dots & \frac{1}{n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \\ \\ \vdots \\ \\ \beta_n \end{pmatrix}.$$

Wir zeigen, dass die Zeilenvektoren der Matrix auf der rechten Seite (ab jetzt von oben nach unten $b_0, \dots b_n$ genannt) linear unabhängig sind. Seien also $(\alpha_k)_{k\in\{0,\dots n\}} \subseteq \mathbb{R}$ geben mit

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_k = 0. \tag{24}$$

Mit dem Standardskalarprodukt auf $\mathbb{R}^{n+1}$ und der kanonischen Basis $(e_k)_{k\in\{0,\dots n\}}$ auf diesem Vektorraum ergibt sich

$$0 = \left\langle e_0, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_k \right\rangle = \alpha_0. \tag{25}$$

Auf analoge Weise ergibt sich die Aussage

$$\forall l \in \{1, \dots, n\} : 0 = n \left\langle e_l, \sum_{k=0}^{n} \alpha_k b_k \right\rangle = \sum_{k=l}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{l-1} \alpha_k. \tag{26}$$

Hieraus folgt per Induktion $\alpha_k = 0$ für alle k. Für den Induktionsbeginn verwenden wir (26) mit $l = 1$ und $l = 2$, dann folgt

$$\alpha_1 = -\sum_{k=2}^{n} \alpha_k \wedge \alpha_1 = \sum_{k=2}^{n} \alpha_k, \tag{27}$$

also gilt $\alpha_1 = 0$. Für den Induktionsschritt ($c \to c+1$) verwenden wir (26) mit $l = c$ und $l = c+1$, dann folgt mit $\alpha_d = 0$ für alle $d < c$

$$0 = \sum_{k=c}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{c-1} \alpha_k = \sum_{k=c}^{n} \alpha_k \iff \alpha_c = -\sum_{k=c+1}^{n} \alpha_k \tag{28}$$

und

$$0 = \sum_{k=c+1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{c} \alpha_k = -\alpha_c + \sum_{k=c+1}^{n} \alpha_k \iff \alpha_c = \sum_{k=c+1}^{n} \alpha_k. \tag{29}$$

Also folgt wieder $\alpha_c = 0$. Es sind also alle Koeffizienten gleich Null, und damit sind $(b_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ linear unabhängig. Die Matrix in Frage ist also invertierbar und daher existieren $(\alpha_k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ mit den gewünschten Eigenschaften.

d) Aus Abschnitt 6.4 im Skript der Analysis 1 wird bewiesen, dass sich der Absolutbetrag gleichmäßig auf einem Intervall durch Polynome annähern lässt. Da sich f_n durch eine Linearkombination von Absolutbeträgen schreiben lässt, kann auch f_n gleichmäßig durch Polynome angenähert werden.

e) Nach Aufgabe b) sind die Menge der Polygonzüge dicht in $C([0,1],\mathbb{R})$ bezüglich$\|\cdot\|_\infty$) und nach Aufgabe d) ist $\mathcal{P}_{[0,1]}$ dicht in den Polygonzügen bezüglich der gleichen Topologie. Insgesamt sind also Polynome dicht in den stetigen Funktionen bezüglich $\|\cdot\|_\infty$.

Aufgabe 4

Seien V, $\|\cdot\|$, $\mathbb{K}$ und $B_1(0)$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Es ist zu zeigen, dass die Kompaktheit von $B_1(0)$ äquivalent dazu ist, dass V endlichdimensional ist.

a) $\Rightarrow$ b): Nehme an, V sei endlichdimensional. Dann gilt nach Korollar 1.167, dass $B_1(0)$ kompakt ist, denn es ist beschränkt und abgeschlossen.

b) $\Rightarrow$ a): Wir beweisen die andere Implikation durch Kontraposition. Nehme dazu an, dass $\dim V = \infty$. Wir zeigen zunächst folgendes

Lemma 1. *Zu jedem abgeschlossenen echten Untervektorraum U von V und jedem $\delta \in]0,1[$, gibt es ein normiertes Element $w \in V$ mit*

$$\inf_{u\in U} \|u - w\| \geq \delta. \tag{30}$$

Beweis: Da U ein echter Untervektorraum ist finden wir einen Punkt $z \in V \setminus U$. Weil U abgeschlossen ist, gilt dann

$$d := \inf_{u\in U} \|u - z\| > 0. \tag{31}$$

Weil d als Infimum definiert ist gibt es u_0 mit

$$d \leq \|z - u_0\| \leq \frac{d}{\delta}. \tag{32}$$

Wir definieren jetzt

$$w := \frac{z - u_0}{\|z - u_0\|}. \tag{33}$$

Damit folgt für alle $u \in U$

$$\|w-u\| = \left\| \frac{z-u_0}{\|z-u_0\|} - u \right\| = \frac{1}{\|z-u_0\|} \|z - u_0 - \|z-u_0\| u\| \tag{34}$$

$$\geq \frac{1}{\|z-u_0\|} \inf_{u \in U} \|z-u\| = \frac{d}{\|z-u_0\|} \geq \frac{\delta d}{d} = \delta. \tag{35}$$

Wir verwenden nun dieses Lemma iterativ um uns eine Folge zu definieren, welche keine Cauchyfolge ist. Wir wählen $z_1 \in V$ mit $\|z_1\| = 1$ beliebig. Dann definieren wir weiter $U_k = \operatorname{span}\{z_l \mid l \leq k\}$ und wählen nach dem Lemma z_{k+1} mit

$$\inf_{u \in U_k} \|z_k - u\| \geq \frac{1}{2} \wedge \|u\| = 1 \tag{36}$$

aus (jeweils für alle $k \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$). Damit gilt $\|z_k - z_l\| \geq \frac{1}{2}$ für alle $k \neq l \in \mathbb{N}$. Die damit entstehende Folge $(z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subseteq B_1(0)$ ist nach Konstruktion keine Cauchyfolge und jede Unterfolge ist ebenfalls keine Cauchyfolge. Demnach kann $(z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ keine konvergente Teilfolge haben, also ist $B_1(0)$ nicht kompakt. $\square$

Aufgabe 5

a) Sei (M, d) ein metrischer Raum und $A \subseteq M$ totalbeschränkt. Es ist zu zeigen, dass $\overline{A}$ ebenfalls totalbeschränkt ist. Sei daher $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir verwenden die Totalbeschränktheit von A mit $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ und erhalten

$$A \subseteq \bigcup_{k \in E \subseteq M} U_{\varepsilon/2}(k). \tag{37}$$

Zusammen mit Aufgabe T4.1 ergibt das

$$\overline{A} \subseteq \overline{\bigcup_{k \in E \subseteq M} U_{\varepsilon/2}(k)} = \bigcup_{k \in E \subseteq M} \overline{U_{\varepsilon/2}(k)} \subseteq \bigcup_{k \in E \subseteq M} B^d_{\varepsilon/2}(k) \subseteq \bigcup_{k \in E \subseteq M} U_\varepsilon(k). \tag{38}$$

b) Die Vervollständigung eines halbmetrischen totalbeschränkten Raumes (M, d) ergibt einen vollständigen Raum (M', d') in den der ursprüngliche eingebettet werden kann, sodass

$$\overline{M} = M' \tag{39}$$

gilt. Weil M totalbeschränkt ist gilt nach a), dass M' ebenfalls totalbeschränkt und damit kompakt ist.

c) Es sei p eine Primzahl. Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{Z}$ bezüglich d_p totalbeschränkt ist. Sei dafür $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir definieren $n \in \mathbb{N}$ durch $n := \sup\{k \in \mathbb{N} \mid p^{-k} \leq \varepsilon\}$. Wie bereits für Aufgabe H4.6a) gezeigt wurde, gilt

$$\forall k \in \mathbb{Z} : k + p^n \mathbb{Z} = U^{d_p}_{p^{-n+1}}(k) = B^{d_p}_{p^{-n}}(k). \tag{40}$$

Aus der Definition von d_p ist klar, dass $U^{d_p}_\varepsilon(k) = U^{d_p}_{p^{-n}}(k)$ für alle $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Zusammengenommen gilt also

$$\mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \{0, \dots, p^n - 1\}} U^{d_p}_\varepsilon(k). \tag{41}$$

Damit ist $\mathbb{Z}$ totalbeschränkt. Nach b) gilt dann, dass $\mathbb{Z}_p = \overline{\mathbb{Z}}$ kompakt ist.

Aufgabe 6

a) Es ist zu zeigen, dass $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ (Definition in der Aufgabenstellung) kompakt ist. Wir wissen bereits (Siehe Lösung von Aufgabe T8.2b)), dass das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Abbildung kompakt ist. Es bezeichne k die kanonische Abbildung, $k : \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \times \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Damit ist $k\left[\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \times \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}\right] = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ klar. Sei $(x_1, x_2) = x \in \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \times \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}$, und $\alpha = \frac{1}{\|x\|_2}$, wobei $\|\cdot\|_2$ die übliche Norm auf $\mathbb{C}^4$ ist. Dann folgt $x\alpha \in S^3$. Es folgt mit der Definition von $k : k(x) = k(\alpha x)$ und damit folgt insgesamt $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) = k\left[\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \times \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\}\right] \subseteq k\left[S^3\right]$. Weil die andere Inklusion immer gilt, folgt $k\left[S^2\right] = \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$. Nun ist S^3 kompakt nach Aufgabe H8.4, denn $\mathbb{C}^4$ ist endlichdimensional. Daher ist auch $\mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ kompakt.

b) Es ist zu zeigen, dass f (Aufgabenstellung) wohldefiniert ist. Sei dafür $\mathbb{P}_1(\mathbb{C}) \ni x := \{(\alpha x_1, \alpha x_2) \in \mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \mid 0 \neq \alpha \in \mathbb{C}$. Dann ist zu zeigen, dass $f(x)$ eindeutig definiert ist. Seien also $(y_1, y_2), (z_1, z_2) \in x$ gegeben, dann gilt

$$\exists 0 \neq \alpha \in \mathbb{C} : (\alpha y_1, \alpha y_2) = (z_1, z_2). \tag{42}$$

Daraus folgt $y_2 = 0$ gilt genau dann wenn $z_2 = 0$ gilt. In diesem Fall ist $f(y_1 : y_2) = f(z_1 : z_2)$ erfüllt. Nehme an $y_2 \neq 0$. Dann folgt mit α nach (42)

$$f(y_1 : y_2) = \frac{y_1}{y_2} = \frac{\alpha y_1}{\alpha y_2} = \frac{z_1}{z_2} = f(z_1 : z_2). \tag{43}$$

Nun zur Bijektivität. Wir zeigen zuerst Injektivität. Seien $(x_1 : x_2), (y_1 : y_2) \in \mathbb{P}_1(\mathbb{C})$ mit $f(x_1 : x_2) = f(y_1 : y_2)$ gegeben. Nach der Definition von f folgt direkt, dass $x_2 = 0$ gilt genau dann wenn auch $y_2 = 0$ gilt. Gehe also davon aus, dass das nicht der Fall ist. Dann folgt

$$\frac{x_1}{x_2} = f(x_1 : x_2) = f(y_1 : y_2) = \frac{y_1}{y_2} \tag{44}$$

und damit auch

$$0 = \frac{x_1}{x_2} - \frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1 y_2 - x_2 y_1}{x_2 y_2} \tag{45}$$

und damit

$$x_1 = y_1 \frac{x_2}{y_2}. \tag{46}$$

Nachdem immer $x_2 = y_2 \frac{x_2}{y_2}$ gilt erweist sich $(x_1, x_2) \sim (y_1, y_2)$ also auch $x_1 : x_2 = y_1 : y_2$ als richtig. Damit gilt Injektivität. Nun zur Surjektivität. Es gilt $\infty = f(1 : 0)$. Sei daher $x \in \mathbb{C}$ gegeben. Es folgt $x = f(x : 1)$, f ist also surjektiv. Es verbleiben noch Stetigkeit und Offenheit (Stetigkeit der Inversen) zu zeigen. Wir zeigen zunächst Stetigkeit. Wir wissen bereits, dass die Abbildung $g : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2\backslash\{(0,0), (\infty, \infty)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \infty & x = \infty \\ \infty & y = 0 \\ \frac{x}{y} & \text{sonst} \end{cases} \tag{47}$$

stetig ist. Weil $\mathbb{C}^2\backslash\{(0,0)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1 : x_2)$ nur eine Einschränkung von g ist, ist diese Abbildung ebenfalls stetig. Weil die Quotiententopologie genau die Urbilder offener Mengen unter k enthält ist f genau dann stetig, wenn $k \circ f$ stetig ist. Damit ist f stetig. Mit Lemma 1.177 wissen wir daher, dass f final ist (denn der projektive Raum ist kompakt, f ist stetig und surjektiv und die erweitert komplexen Zahlen sind hausdorff). Das bedeutet, die Topologie der erweitert komplexen Zahlen erfüllt

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}} = \{U \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid f^{-1}[U] \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}\}. \tag{48}$$

Nun ist f bijektiv, damit gilt

$$\mathcal{T}_{\mathbb{C} \cup \{\infty\}} = \{f[V] \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\} \mid V \in \mathcal{T}_{\mathbb{P}_1(\mathbb{C})}\}. \tag{49}$$

Damit ist f stetig invertierbar, also ein Homöomorphismus.