Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Sei $G_{a,b} : (C([a,b]^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty) \to (C([a,b]^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$, für $a, b \in \mathbb{R}$, definiert durch $G(g_{a,b}) = f(g_{a,b}) + Id$. Dies ist wohldefiniert, da f, nach Angabe als Kontraktion mit Kontraktionskonstante $K < 1$ stetig ist. Für $g_{a,b}, g'_{a,b} \in C[a,b]$ gilt

$$\|G(g_{a,b}) - G(g'_{a,b})\|_\infty = \|f(g_{a,b}) + Id - f(g'_{a,b}) - Id\|_\infty = \sup_{x\in[a,b]^n} \|f(g_{a,b}(x)) - f(g'_{a,b}(x))\|_\infty$$

$$\overset{f \text{ Kontraktion}}{<} \sup_{x\in[a,b]^n} K\|g_{a,b}(x) - g'_{a,b}(x)\|_\infty = K\|g_{a,b} - g'_{a,b}\|_\infty.$$

Damit ist auch $G_{a,b}$ eine Kontraktion und da $(C([a,b]^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ vollständig ist gibt es genau ein $g_{a,b} \in (C([a,b]^n, \mathbb{R}^n), \|\cdot\|_\infty)$ mit $g_{a,b} = f(g_{a,b}) + Id$ oder für alle $x \in [a,b] : g_{a,b}(x) = f(g_{a,b}(x)) + x$. Nun müssen wir $g_{a,b}$ noch auf ganz $\mathbb{R}^n$ fortsetzten.
Die gezeigte Aussage gilt insbesondere für alle a, b der Form $[a,b]^n = [-m,m]^n, m \in \mathbb{N}$. Nun können wir definieren: $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $g|_{[-m,m]^n} := g_{-m,m}$. Da es für alle $x \in \mathbb{R}^n$ ein $m \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $x \in [-m,m]^n$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}^n, g(x) = g_{-m,m} = f(g_{-m,m}(x)) + x = f(g(x)) + x$. Des weiteren ist g stetig, da die $g_{-m,m}$ für alle $m \in \mathbb{N}$ stetig sind und für $m > m' \in \mathbb{N}$ ist $g_{-m,m}|_{[-m',m']^n} = g_{-m',m'}$. Damit ist g auch wohldefiniert.

Aufgabe 2

Wir wissen, dass das homogene Anfangswertproblem $y'(t) = Ay(t), y(0) = b$ die Lösung $e^{tA}b$ hat. Um e^{tA} auszurechnen müssen wir A in eine geeignete Normalform überführen, d.h. diagonalisieren oder die Jordan-Normalform bilden.

(a) Wir berechnen die Eigenwerte von A.

$$\det(A - \lambda Id) = \det\begin{pmatrix} -2-\lambda & 2 \\ -6 & 5-\lambda \end{pmatrix} = (-2-\lambda)(5-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 3\lambda + 2.$$

Mittels Mitternachtsformel bekommen wir: $\lambda_{1/2} = \frac{3\pm\sqrt{9-8}}{2} = \frac{3\pm1}{2}$, d.h. $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2$. Wir haben 2 verschiedene Eigenwerte bekommen, damit ist A diagonalisierbar. Bestimmen wir also die Eigenvektoren. Wir erhalten

$$\text{Kern}\begin{pmatrix} -2-1 & 2 \\ -6 & 5-1 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -6 & 4 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$$

und

$$\text{Kern}\begin{pmatrix} -2-2 & 2 \\ -6 & 5-2 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} = \text{Kern}\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

wobei mit $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$ der vom Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ erzeugte Unterraum gemeint ist. Setzen wir zusammen:

$$A = TDT^{-1}$$

für $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Weiter erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{tA} &= Te^{tD}T^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t & e^{2t} \\ 3e^t & 2e^{2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4e^t - 3e^{2t} & 2(e^{2t} - e^t) \\ 6(e^t - e^{2t}) & 4e^{2t} - 3e^t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann $e^{tA} \cdot b$.

(b) Wir berechnen wieder die Eigenwerte von A

$$\det(A-\lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & 4 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)\left[(-1-\lambda)(3-\lambda)+4\right] = (2-\lambda)(\lambda-1)^2$$

und die dazugehörigen Eigenräume:

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} -1-2 & -2 & 4 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ -1 & -1 & 3-2 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} -3 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

und

$$\text{Kern} \begin{pmatrix} -1-1 & -2 & 4 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ -1 & -1 & 3-1 \end{pmatrix} = \text{Kern} \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$$

Der Eigenraum zum Eigenwert 1 hat nur Dimension 1 somit ist A nicht diagonalisierbar. Wir berechnen also die Jordan-Normalform. Wir müssen $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$ ergänzen, dafür wählen wir $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Somit bekommen wir

$$A = SJS^{-1}$$

für $S = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ und $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Für die Matrixexponentialfunktion berechnen wir die Potenzen von J,

$$J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$J^n = \begin{pmatrix} 1 & n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

sowie

$$e^{tJ} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^k}{k!} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^k}{k!} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(t)^k}{k!} = \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix}.$$

Setzen wir zusammen

$$\begin{aligned} e^{tA} = Se^{tJ}S^{-1} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & te^t & 0 \\ 0 & e^t & 0 \\ 0 & 0 & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2e^t & 2te^t - e^t & 2e^t \\ 0 & 0 & -e^t \\ e^t & te^t & e^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2te^t + 4te^t & 0 & 2e^t \\ 0 & e^t & 0 \\ -te^t & 0 & e^t + 2te^t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist dann $e^{tA} \cdot b$.

Aufgabe 3

Wir schreiben das System in Matrixschreibweise:

$$y'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix} y(t), \quad y(0) = b, \qquad \left(y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \right)$$

Da dies ein homogenes Gleichungssystem mit konstanten Faktoren ist, wissen wir die Lösung:

$$e^{At} \cdot b \text{ mit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\mu \end{pmatrix}$$

Um e^A zu bestimmen, versuchen wir A zu diagonalisieren. Dazu berechnen wir das charakteristische Polynom

$$\det(A - \lambda Id) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\mu - \lambda \end{pmatrix} = \lambda(\mu + \lambda) + 1$$

und somit erhalten wir mit der Mitternachtsformel

$$\lambda_{1/2} = \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4}}{2}.$$

Wir betrachten nun den Fall $\mu \neq 2$. Dann haben wir zwei verschiedene Eigenwerte und somit ist A diagonalisierbar. Um die Tranformationsmatrizen zu berechnen bestimmen wir nun den Eigenraum zum Eigenwert λ.

$$\begin{aligned} \operatorname{Kern}(A - \lambda Id) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\mu - \lambda \end{pmatrix} &\overset{(II)+(\lambda+\mu)(I)}{=} \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 - \lambda(\mu + \lambda) & 0 \end{pmatrix} \\ &\overset{1+\lambda(\mu+\lambda)=0}{=} \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & \mu + \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Wir bekommen also den Eigenvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \end{pmatrix}$ zum Eigenwert λ. Somit können wir A diagonalisieren:

$$A = TDT^{-1}$$

für $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, T^{-1} = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix}$ und $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Also:

$$\begin{aligned} e^{At} = Te^{Dt}T^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_1 e^{\lambda_1 t} & \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & -e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t} \\ \lambda_2 \lambda_1 e^{\lambda_1 t} - \lambda_2 \lambda_1 e^{\lambda_2 t} & -\lambda_1 e^{\lambda_1 t} + \lambda_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Lösung des Anfangswertproblems, d.h. $y_1(t)$ erhalten wir als die obere Zeile des Vektors $e^{At} \cdot b$. Somit ist

$$y_1(t) = b_1(\lambda_2 e^{\lambda_1 t} - \lambda_1 e^{\lambda_2 t}) + b_2(-e^{\lambda_1 t} + e^{\lambda_2 t}).$$

Im Fall $\mu = 2$ haben wir nur einen Eigenwert $\lambda = \frac{-\mu}{2} = -1$. Der dazugehörige Eigenraum ist

$$\operatorname{Kern}(A + Id) = \operatorname{Kern} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} = \left\{ x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$$

Der Eigenraum ist also nur eindimensional. Wir können A somit nicht diagonalisieren sondern bekommen nur die Jordan-Normalform $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Für die Transformationsmatrizen müssen wir die Basis des Eigenraums auf eine Basis des dazugehörenden Hauptraums($= \mathbb{R}^2$) ergänzen, z.B. mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$A = SJS^{-1}$$

mit $S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $J = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Um $e^{At} = Se^{Jt}S^{-1}$ zu berechnen brauchen wir die Potenzen von J.

$$J^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit ist $J^{2k} = Id$ und $J^{2k+1} = J$ und

$$\begin{aligned} e^{Jt} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tJ)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t)^{2k+1}}{(2k+1)!} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{-t} & \sinh(t) \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Rest ist Ausmultiplizieren analog zum oberen Fall.

Aufgabe 4

(a) Die gesuchten Gleichungen sind

$$\begin{aligned} a'(t) &= -k_{AB}a(t) + k_{BA}b(t) && (1) \\ b'(t) &= k_{AB}a(t) - (k_{BA} + k_{BC})b(t) + k_{CB}c(t) && (2) \\ c'(t) &= k_{BC}b(t) - k_{CB}c(t) && (3) \end{aligned}$$

Wegen $c(t) = 1 - a(t) - b(t)$ folgt

$$\begin{aligned} b'(t) &= k_{AB}a(t) - (k_{BA} + k_{BC})b(t) + k_{CB}(1 - b(t) - a(t))) \\ &= (k_{AB} - k_{CB})a(t) - (k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})b(t) + k_{CB} \end{aligned} \qquad (2')$$

Insbesondere folgen aus (1) und $(2')$ schon $(1), (2'), (3)$, z.B. durch Einsetzen. Also genügt es (1) und (2) zu lösen. Als Matrix erhalten wir für $y(t) = (a(t), b(t))^t$

$$y'(t) = Ay(t) + g, \quad A := \begin{pmatrix} -k_{AB} & k_{BA} \\ k_{AB} - k_{CB} & -k_{BA} - k_{BC} - k_{CB} \end{pmatrix}, \quad g = \begin{pmatrix} 0 \\ k_{CB} \end{pmatrix}.$$

(b) Die Lösung des homogenen Gleichungssystems ist bekanntlich e^{tA}. Wir berechnen e^{tA} aus der entsprechenden Normalform von A: Das charakteristische Polynom zu A ist

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda E) &= (k_{AB} + \lambda)(k_{BA} + k_{BC} + k_{CB} + \lambda) + k_{BA}(k_{CB} - k_{AB}) \\ &= \lambda^2 + (k_{AB} + k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})\lambda + k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{BC} + k_{BA}k_{CB} \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Diese bekommen wir durch die Mitternachtsformel, hier entscheidet die Diskriminante über die Anzahl an verschiedenen Nullstellen. Für die Diskriminante gilt

$$\begin{aligned} D_A &= (k_{AB} + k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})^2 - 4(k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB}) \\ &= (-k_{AB} - k_{BA} + k_{BC} + k_{CB})^2 + 4k_{BA}k_{BC} > 0 \end{aligned}$$

d.h. A hat 2 verschiedene (und damit nur verschiedene) Eigenwerte. Somit ist A diagonalisierbar. Seien $\lambda_1 \neq \lambda_2$ die beiden Eigenwerte. Wir bestimmen die Transformationsmatrix aus den Eigenvektoren

$$A \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{k_{BA}}{k_{AB}+\lambda_i} \\ 1 \end{pmatrix}}_{=:v_i} = \begin{pmatrix} \frac{-k_{AB}k_{BA}+k_{BA}(k_{AB}+\lambda_i)}{k_{AB}+\lambda_i} \\ \frac{(k_{AB}-k_{CB})k_{BA}}{k_{AB}+\lambda_i} - (k_{BA}+k_{BC}+k_{CB}) \end{pmatrix} = \lambda_i \begin{pmatrix} \frac{k_{BA}}{k_{AB}+\lambda_i} \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda_i v_i$$

wobei wir

$$\begin{aligned} &\frac{(k_{AB}-k_{CB})k_{BA}}{k_{AB}+\lambda_i} - (k_{BA}+k_{BC}+k_{CB}) \\ &= \frac{(k_{AB}-k_{CB})k_{BA} - (k_{BA}+k_{BC}+k_{CB})(k_{AB}+\lambda_i)}{k_{AB}+\lambda_i} \\ &= \frac{-k_{CB}k_{BA} - k_{BC}k_{AB} - k_{CB}k_{AB} - \lambda_i(k_{BA}+k_{BC}+k_{CB})}{k_{AB}+\lambda_i} \\ &= \frac{\overbrace{\det(A-\lambda_i E)}^{=0} - k_{CB}k_{BA} - k_{BC}k_{AB} - k_{CB}k_{AB} - \lambda_i(k_{BA}+k_{BC}+k_{CB})}{k_{AB}+\lambda_i} \\ &= \frac{\lambda_i^2 + k_{AB}\lambda_i}{k_{AB}+\lambda_i} = \lambda_i \end{aligned}$$

für $i = 1,2$ verwendet haben. Wir erhalten die Transformationsmatrix $P = (v_1, v_2)$. Somit haben wir $A = P \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) \cdot P^{-1}$. Allgemein gilt für $z \in \mathbb{R}$, eine $2 \times 2-$Matrix $Q := \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und ihre Inverse $Q^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$:

$$\begin{aligned} Q \operatorname{diag}(e^z, e^{-z}) Q^{-1} &= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} ade^z - bce^{-z} & -ab(e^z - e^{-z}) \\ cd(e^z - e^{-z}) & ade^{-z} - bce^z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{ad-bc}{ad-bc}\cosh(z) + \frac{ad+bc}{ad-bc}\sinh(z) & \frac{-2ab}{ad-bc}\sinh(z) \\ \frac{2cd}{ad-bc}\sinh(z) & \frac{ad-bc}{ad-bc}\cosh(z) - \frac{ad+bc}{ad-bc}\sinh(z) \end{pmatrix} \\ &= \cosh(z) + \frac{\sinh(z)}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -(ad+bc) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Wir wenden diese Formel für $y := \frac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$ und damit $z := \frac{-\sqrt{D_A}}{2}$ und $P =: Q$ an, dann ist

$$e^{tA}b = e^{yt} \left(\cosh(tz) + \frac{\sinh(tz)}{ad-bc} \begin{pmatrix} ad+bc & -2ab \\ 2cd & -(ad+bc) \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

eine Lösung der homogenen Gleichung. Wegen $k_{BA} + k_{BC} + k_{CB} + k_{AB} = -\lambda_2 - \lambda_1 \Leftrightarrow k_{BA} + k_{BC} + k_{CB} + \lambda_1 = -\lambda_2 - k_{AB}$, folgt aus $\det(A - \lambda_1 E) = 0$ schon $(k_{AB}+\lambda_1)(k_{AB}+\lambda_2) = k_{BA}(k_{CB} - k_{AB})$. Weiter ist $\sqrt{D_A} = \lambda_2 - \lambda_1$. Es gilt somit weiter

$$ad - bc = k_{BA}\sqrt{D_A}, \qquad ad + bc = (k_{AB} - k_{BA} - k_{CB} - k_{BC})k_{BA},$$
$$cd = k_{BA}(k_{CB} - k_{AB}), \qquad ab = k_{BA}^2.$$

Man beachte, dass wir mit $\det(A - \lambda E)|_{\lambda=0} = k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB} > 0$ gezeigt haben, dass A invertierbar ist. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{k_{AB}k_{BC} + k_{AB}k_{CB} + k_{BA}k_{CB}} \begin{pmatrix} k_{AB} + k_{BC} + k_{CB} & k_{BA} \\ k_{AB} - k_{CB} & k_{AB} \end{pmatrix}.$$

Eine Lösung des inhomogenen Anfangswertproblems ist gegeben durch $e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA-1})g$:

$$\frac{d}{dt}(e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g) = Ae^{tA}b + e^{tA}g = A(e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g) + g.$$

Als Lösung für $b_1 = 1, b_2 = 0$ erhalten wir

$$\mu(t) = \exp\left(\frac{-(k_{AB} + k_{BA} + k_{CB} + k_{BC})t}{2}\right) \cdot \left(\cosh\left(\frac{\sqrt{D_A}}{2}t\right) - \frac{\sinh\left(\frac{\sqrt{D_A}}{2}t\right)}{\sqrt{D_A}} \cdot\right.$$

$$\left. \cdot \begin{pmatrix} k_{AB} - k_{BA} - k_{CB} - k_{BC} & -2k_{BA} \\ 2(k_{CB} - k_{AB}) & -k_{AB} + k_{BA} + k_{CB} + k_{BC} \end{pmatrix}\right)\Bigg)$$

$$\cdot \begin{pmatrix} \frac{k_{AB}(k_{BC}+k_{CB})}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{-k_{AB}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{k_{BA}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{k_{AB}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \end{pmatrix}$$

(c) Wegen $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ folgt unabhängig von den Anfangswerten aus $e^{tA}b + A^{-1}(e^{tA} - 1)g$

$$\begin{pmatrix} a(t) \\ b(t) \\ c(t) \end{pmatrix} \overset{t\to\infty}{\to} \begin{pmatrix} \frac{k_{BA}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{k_{AB}k_{CB}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \\ \frac{k_{AB}k_{BC}}{k_{AB}k_{BC}+k_{AB}k_{CB}+k_{BA}k_{CB}} \end{pmatrix}$$

Entsprechen erhält man im Gleichgewicht $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{a(t)}{b(t)} = \frac{k_{BA}}{k_{AB}}$ und $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{b(t)}{c(t)} = \frac{k_{CB}}{k_{BC}}$ - das Massenwirkungsgesetz.
Bemerkung: Die Aufgabe kann natürlich auch mit der zu den Gleichungen (1), (2) und (3) gehörenden $3\times3-$Matrix gelöst werden. Entsprechend findet man einen zusätzlichen Eigenwert 0. Die Bestimmung der Transformationsmatrizen und des Matrixexponentials verläuft dann analog.

Aufgabe 5

Wir zeigen die Aussage durch Induktion. Für den Induktionsanfang $m = 0$ haben wir

$$\|y^{(1)}(x) - y^{(0)}(x)\| = \left\| b + \int_a^x f(t, y)\,\mathrm{d}t - b \right\| \leq C\|x - a\|$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir nun an, dass die Aussage für alle $n < m$ wahr ist und zeigen die Ungleichung für m.

$$\begin{aligned}
\|y^{(m)}(x) - y^{(m-1)}(x)\| &= \left\| b + \int_a^x f(t, y^{(m)})\,\mathrm{d}t - b - \int_a^x f(t, y^{(m-1)})\,\mathrm{d}t \right\| \\
&\leq \int_a^x \left\| f(t, y^{(m)}) - f(t, y^{(m-1)}) \right\| \,\mathrm{d}t \\
&\leq \int_a^x L \left\| y^{(m)} - y^{(m-1)} \right\| \,\mathrm{d}t \\
&\leq L \int_a^x \left(CL^{m-1} \frac{|t-a|^m}{m!} \right) \mathrm{d}t = CL^m \frac{|x-a|^{m+1}}{(m+1)!}.
\end{aligned}$$

Wobei wir in der zweiten Ungleichung die Lipschitz Stetigkeit von f und in der letzten Ungleichung die Induktionsvoraussetzung benutzt haben. Damit ist die Induktion abgeschlossen. Jetzt zeigen wir folgende Gleichheit:

$$|y(x) - y^{(m)(x)}\| \leq C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!}. \qquad (\star)$$

Sei $n < m$, dann gilt

$$\begin{aligned}|y(x)^{(n)} - y^{(m)(x)}\| &\leq |y(x)^{(n)} - y^{(n-1)(x)}\| + ... + |y(x)^{(m+1)} - y^{(m)(x)}\| \\ &\leq C \sum_{k=m+1}^{n} L^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!}.\end{aligned}$$

Man erhält $(\star)$ indem man n gegen Unendlich gehen lässt. Wir schreiben die rechte Seite der Ungleichung um:

$$C \sum_{k=m+1}^{\infty} L^{k-1} \frac{|x-a|^k}{k!} = \frac{C}{L} \left(e^{L|x-a|} - \sum_{k=0}^{m} L^k \frac{|x-a|^k}{k!} \right). \tag{$\star\star$}$$

Wir erinnern uns an die Taylor Entwicklung der Exponentialfunktion,

$$e^{L|x-a|} = \sum_{k=0}^{\infty} L^k \frac{|x-a|^k}{k!} = \sum_{k=0}^{m} L^k \frac{|x-a|^k}{k!} + R_{a,m}(e^{L|x-a|})$$

wobei $R_{a,m}(e^{L|x-a|})$ der Restterm der Taylor Reihe ist. Aus der Analysis I (Satz 6.4) wissen wir, dass

$$R_{a,m}(e^{L|x-a|}) = \int_a^x \frac{L^{m+1} e^{L|t-a|}}{m!} (x-t)^m \, \mathrm{d}t.$$

Ersetzten von $(\star\star\star)$ unten in $(\star)$ gibt die gewünschte Ungleichung.

$$e^{L|x-a|} = \sum_{k=0}^{m} L^k \frac{|x-a|^k}{k!} + \int_a^x \frac{L^{m+1} e^{L|t-a|}}{m!} (x-t)^m \, \mathrm{d}t \tag{$\star\star\star$}$$