Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Seien $p, \alpha, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Seien weiter $b > k \in \mathbb{N}$ gegeben, wir untersuchen, wann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist. Da L^p vollständig ist, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau in diesem Fall. Zuerst schreiben wir die Folgeglieder als abschnittsweise definierte Funktionen so

$$f_n(x) = \begin{cases} n & \text{für } x \leq n^{-\alpha^{-1}} \\ x^{-\alpha} & \text{für } x \geq n^{-\alpha^{-1}} \end{cases} \tag{1}$$

für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in [0,1]$ um. Wir schätzen nun$\|f_b - f_k\|_p$ ab. Es gilt

$$\begin{aligned} \|f_b - f_k\|_p^p &= \int_0^{b^{-\alpha^{-1}}} |b-k|^p \mathrm{d}x + \int_{b^{-\alpha^{-1}}}^{k^{-\alpha^{-1}}} \left|k - x^{-\alpha}\right|^p \mathrm{d}x + \int_{k^{-\alpha^{-1}}}^1 0 \ \mathrm{d}x \\ &= (b-k)^p b^{-\alpha^{-1}} + \int_{b^{-\alpha^{-1}}}^{k^{-\alpha^{-1}}} \left(k - x^{-\alpha}\right)^p \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{2}$$

Sei nun $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir nehmen an, dass $p < \alpha^{-1}$ gilt. Wir wählen $N = \left\lfloor \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\alpha^{-1}-p} \right\rfloor + 1$, dann folgt für $b, n > N$

$$\begin{aligned} \|f_b - f_k\|_p^p &\leq b^p b^{-\alpha^{-1}} + \int_{b^{-\alpha^{-1}}}^{k^{-\alpha^{-1}}} k^p \mathrm{d}x \leq b^{p-\alpha^{-1}} + k^p \left(k^{-\alpha^{-1}} - b^{-\alpha^{-1}}\right) \\ &\leq b^{p-\alpha^{-1}} + k^{p-\alpha^{-1}} \leq 2N^{p-\alpha^{-1}} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Für den Umgekehrten Fall sei nun $p \geq \alpha^{-1}$, wir wählen $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben, wir wählen $b, k > N$, sodass $k < b\left(1 - \sqrt[p]{\frac{9}{10}}\right)$ erfüllt ist. Dann folgt mit (2)

$$\|f_b - f_k\| \geq (b-k)^p b^{-\alpha^{-1}} \geq \frac{9}{10} b^{p-\alpha^{-1}} \geq \frac{9}{10} > \varepsilon.$$

Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also eine Cauchy-Folge genau dann, wenn $p < \alpha^{-1}$ gilt.

Aufgabe 2

Diese Aufgabe behandelt einen Spezialfall von Aufgabe H4.5 mit leicht variierter Definition der Cauchy-Folge. Siehe Lösung von dieser Aufgabe für eine ausführliche Behandlung.

Aufgabe 3

Seien $n, M_1, \ldots M_n, d_1, \ldots, d_n$ und M wie in der Aufgabenstellung.

a) Seien $A_k \subseteq M_k$ für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gegeben. Wir zeigen zuerst: $\overline{A_1}, \times \cdots \times \overline{A_n} \subseteq \overline{A_1 \times \cdots \times A_n}$. Sei also $(a_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} = a \in \overline{A_1}, \times \cdots \times \overline{A_n} \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} : b_k \in U_{d_k}^{\varepsilon}(a_k) \cap A_k \neq \emptyset. \tag{3}$$

Dann folgt

$$(b_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} \in U_d^{\varepsilon}(a) \cap A_1 \times \cdots \times A_n, \tag{4}$$

und damit auch $a \in \overline{A_1 \times \cdots \times A_n}$. Zeige nun
$\overline{A_1 \times A_n} \subseteq \overline{A_1}, \times \cdots \times \overline{A_n}$. Sei dafür $(a_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} = a \in \overline{A_1 \times \cdots \times A_n} \subseteq M_1 \times \cdots \times M_n$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle

$$(b_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} \in U_d^\varepsilon(a) \cap A_1 \times \cdots \times A_k \neq \emptyset. \tag{5}$$

Aus der Definition der Produktmetrik folgt nun direkt

$$b_k \in U_{d_k}^\varepsilon(a_k) \cap A_k \neq \emptyset. \tag{6}$$

Also gilt $a \in \overline{A_1} \times \cdots \times \overline{A_n}$.

b) Seien $(\hat{M}_k, \hat{d}_k, i_k)$ für $k \in \{1,\ldots,n\}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Um zu überprüfen ob $(\hat{M}, \hat{d}, i)$ eine Vervollständigung von (M, d) ist, gehen wir die Definition von Vervollständigung (Definition 1.111 im Skript) durch:

   1) Um zu zeigen, dass i eine Isometrie ist, seien $a = (a_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}, b = (b_k)_{k\in\{1,\ldots,n\}} \in M$ gegeben. Für deren Abstand gilt

   $$\hat{d}(i(a), i(b)) = \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} \hat{d}_k(i_k(a_k), i_k(b_k)) \overset{\Lambda}{=} \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} d_k(a_k, b_k) = d(a, b), \tag{7}$$

   wobei bei der mit Λ gekennzeichneten Gleichung verwendet wurde, dass i_k eine Isometrie ist.

   2) Dass $i[M]$ dicht in $\hat{M}$ liegt, folgt direkt aus Teilaufgabe a).

   3) Für den Beweis der Vollständigkeit sei eine Cauchy-Folge $(x_l)_{l\in\mathbb{N}} = (x_l^k)_{l\in\mathbb{N},k\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq \hat{M}$ gegeben. Hierbei und für den Rest der Aufgabe ist a^k für alle Objekte a und $k \in \mathbb{N}$ nicht als Potenz, sondern als Index zu verstehen. Aus der Definition der Produktmetrik folgt unmittelbar, dass alle Folgen $(x_l^k)_{l\in\mathbb{N},k\in\{1,\ldots,n\}} \subseteq \hat{M}_k$ ebenfalls Cauchy-Folgen sind. Definiere daher (Vollständigkeit von $\hat{M}_k$) für alle $k \in \{1,\ldots,n\}$

   $$x^k := \lim_{l\to\infty} x_l^k. \tag{8}$$

   Wähle nun für alle k, N_k so, dass

   $$d_k(x^k, x_l^k) < \varepsilon \tag{9}$$

   für alle $l > N_k$ erfüllt ist. Es folgt somit

   $$\forall l > \max_{k\in\{1,\ldots,n\}} N_k : \quad \hat{d}((x^k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}, x_l) < \varepsilon, \tag{10}$$

   also konvergiert $(x_l)_{l\in\mathbb{N}}$ in $\hat{M}$ gegen $(x^k)_{k\in\{1,\ldots,n\}}$. □

Aufgabe 4

Seien $p, q \in [1, \infty[$ gegeben. Wir teilen den Beweis in zwei Schritte. Der Fall $p = q$ wird nicht behandelt, da die Identität auf $C([0,1], \mathbb{R}) \to C([0,1], \mathbb{R})$ offenbar auf $(L^2([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2) \to (L^2([0,1], \mathbb{R}), \|\cdot\|_2)$ gehoben werden kann.

1) $p > q$: Sei $f \in C([0,1], \mathbb{R})$ gegeben. Wir zeigen, dass die Identität gleichmäßig stetig ist. Wir verwenden dabei die Integralversion der Hölderungleichung (Aufgabe T3.2) mit (Buchstaben mit $'$ kennzeichnen die Größen in der Hölderungleichung in Aufgabe T3.3) $q' = b = \frac{p}{q}, p' = c = \frac{p}{p-q}, f'(x) = 1, g'(x) = |f|^q(x)$. Diese Werte sind zulässig, weil $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$ erfüllt ist. Es gilt:

$$\|f\|_q^q = \int_0^1 1 \cdot |f|^q(x)\mathrm{d}x \leq \sqrt[c]{\int_0^1 1^c \mathrm{d}x} \sqrt[b]{\int_0^1 |f|^{qb}(x)\mathrm{d}x} = \left(\int_0^1 |f|^{q\frac{p}{q}}(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} \tag{11}$$

$$= \left(\int_0^1 |f|^p(x)\mathrm{d}x\right)^{\frac{q}{p}} = \|f\|_p^q. \tag{12}$$

Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir wählen $\delta = \varepsilon$, dann folgt

$$\forall g, h \in C([a,b],\mathbb{R}) : (\|g-h\|_p < \delta \Rightarrow \|g-h\|_q \leq \|g-h\|_p < \delta = \varepsilon). \tag{13}$$

2) $q > p$: Aus Aufgabe H6.1 folgt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (Notation aus dieser Aufgabe) in $L^p([0,1],\mathbb{R})$ konvergiert für $\alpha^{-1} = p + \frac{q-p}{2}$, jedoch nicht in $L^q([0,1],\mathbb{R})$. Wir nennen die Grenzfunktion $f \in L^p([0,1],\mathbb{R})$. Angenommen die Identität hätte eine stetige Fortsetzung auf $(I : L^p([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p) \to (L^q([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_q)$. Dann muss insbesondere I stetig bei f sein. Wähle ε so groß, dass
$$\forall N \in \mathbb{N}\ \exists b, k > N : \|f_b - f_k\|_q > \varepsilon \tag{14}$$
erfüllt ist. So eine Wahl ist immer möglich, da die Folge nicht konvergiert bezüglich $\|\cdot\|_q$. Sei $\delta > 0$ gegeben. Sei $H \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen $b, k > H$ nach (14) und der Konvergenz bezüglich $\|\cdot\|_p$ so, dass
$$\|f_b - f_k\|_p < \delta \wedge \|f_b - f_k\|_q > \varepsilon \tag{15}$$
gilt. Es folgt, dass I nicht stetig in f ist. □

Aufgabe 5

Es seien $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}, (f_n)_{n\in\mathbb{N}}, p$ wie in der Aufgabenstellung gegeben.

a) Wir betrachten erst einen einzelnen Summanden. Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben, es gilt
$$\begin{aligned}\|f_n\|_p^p &= \int_0^1 \left|ne^{-e^n|x-q_n|}\right|^p \mathrm{d}x = n^p \int_0^1 e^{-e^n p|x-q_n|}\mathrm{d}x \leq n^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^n p|x-q_n|}\mathrm{d}x \\ &= n^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{-e^n p|x|}\mathrm{d}x = 2n^p \int_0^{\infty} e^{-e^n px}\mathrm{d}x = 2n^p \frac{1}{-pe^n} e^{-pe^n x}\Big|_{x=0}^{\infty} = \frac{2}{p} n^p e^{-n}.\end{aligned}$$
Also folgt (wie im Hinweis angegeben)
$$\|f_n\|_p \leq \sqrt[p]{\frac{2}{p}} ne^{-\frac{n}{p}} =: c_p n e^{-\frac{n}{p}}. \tag{16}$$
Hiermit ergibt sich für die Summe
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} \|f_k\|_p \leq c_p \sum_{k=0}^{\infty} ke^{-\frac{k}{p}} &= c_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{e^{\frac{k}{2p}}} e^{-\frac{k}{2p}} \leq c_p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k/(2p)} e^{-\frac{k}{2p}} \\ &= 2pc_p \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\frac{k}{2p}} = 2pc_p \frac{1}{1-e^{-\frac{1}{2p}}} < \infty\end{aligned}$$

b) Seien $m > l \in \mathbb{N}$ gegeben. Die Folge $(\sum_{k=0}^n \|f_k\|_p)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in $\mathbb{R}$, denn nach Teilaufgabe a) ist sie beschränkt, sie ist außerdem monoton wachsend, insgesamt also konvergent. Es gilt
$$\left\|\sum_{k=0}^m f_k - \sum_{k=0}^l f_k\right\|_p = \left\|\sum_{k=l+1}^m f_k\right\|_p \leq \sum_{k=l+1}^m \|f_k\|_p. \tag{17}$$
Die rechte Seite dieser Ungleichung entspricht der Partialsumme einer konvergierenden Reihe, deshalb konvergiert die Folge $(\sum_{k=0}^n f_k)_{n\in\mathbb{N}}$ in $(L^p([0,1],\mathbb{R}), \|\cdot\|_p)$.

c) Sei $x \in [0,1]$ gegeben. Die Folge $(\sum_{k=0}^n f_k(x))_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton steigend, da alle Summanden positiv sind. Daher gilt
$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^n f_k(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x). \tag{18}$$
Weil das Supremum einer nichtleeren positiven Menge immer in $[0,\infty]$ existiert, existiert auch die rechte Seite von (18) in $[0,\infty]$.

d) Sei f der punktweise Limes aus c), und $a < b \in [0,1]$ gegeben. Wir wählen $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}^c$ aus und konstruieren die folgende Folge von Teilmengen von $[a,b]$: Wir wählen $l_0 = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid q_n \in [a,b]\}$ und

$$\forall n \in \mathbb{N} : B_n := U_{|x - q_{l_{n-1}}|}(x) \tag{19}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : l_n := \inf\{k \in \mathbb{N} \mid q_k \in B_n\}. \tag{20}$$

Nach Aufgabenstellung ist $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Aufzählung von $\mathbb{Q}$. Weil nach Definition von B_n: $q_{l_{n-1}} \notin B_n$ für alle n gilt, steigt $(l_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ streng monoton. Eine streng monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$ geht gegen Unendlich, es folgt $\sup_{n\in\mathbb{N}} l_n = \infty$. Es gilt außerdem $(q_{l_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq [a,b]$ und damit auch

$$\sup_{x\in[a,b]} f(x) \geq \sup_{n\in\mathbb{N}} f_{l_n}(q_{l_n}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} l_n e^{-e^{l_n}|q_{l_n} - q_{l_n}|} = \sup_{n\in\mathbb{N}} l_n = \infty.$$

□

Aufgabe 6

Seien V und ι wie in der Aufgabenstellung gegeben und $\|\cdot\|_{1,2}$ bezeichne die in der Aufgabenstellung definierte Sobolevnorm.

a) Wir zeigen zuerst die Aussagen im Tipp. Sei $f \in V$ gegeben. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 (t - 1_{t>x})f'(t)\mathrm{d}t &= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 tf'(t)\mathrm{d}t - \int_x^1 f'(t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + tf(t)|_{t=0}^1 - \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t - f(t)|_{t=x}^1 = f(x).\end{aligned} \tag{21}$$

Es gilt außerdem aufgrund der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left|\int_0^1 1 \cdot f(t)\mathrm{d}t\right| \leq \sqrt{\int_0^1 1^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 |f|^2(t)\mathrm{d}t} = \|f\|_2 \leq \|f\|_{1,2} \tag{22}$$

und

$$\begin{aligned}\left|\int_0^1 (t - 1_{t>x})f'(t)\mathrm{d}t\right| &\leq \sqrt{\int_0^1 |t - 1_{t>x}|^2\mathrm{d}t}\sqrt{\int_0^1 |f'(t)|^2\mathrm{d}t} \\ &\leq \sqrt{\int_0^1 1^2\mathrm{d}t}\|f'\|_2 = \|f'\|_2 \leq \|f\|_{1,2}.\end{aligned} \tag{23}$$

Insgesamt folgt also

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| = \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 (t - 1_{t>x})f'(t)\mathrm{d}t\right| \\ \leq \left|\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\right| + \sup_{x\in[0,1]} \left|\int_0^1 (t - 1_{t>x})f'(t)\mathrm{d}t\right| \leq \|f\|_{1,2} + \sup_{x\in[0,1]} \|f\|_{1,2} = 2\|f\|_{1,2}.\end{aligned} \tag{24}$$

Wir zeigen nun, dass ι gleichmäßig stetig ist. Sei dafür $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Seien $g, h \in V$ gegeben, dann folgt mit (24)

$$\|g - h\|_{1,2} < \delta \Rightarrow \|g - h\|_\infty \leq 2\|g - h\|_{1,2} = \varepsilon. \tag{25}$$

b) Die Vervollständigung von ι existiert und ist gleichmäßig stetig nach Korollar 1.116, da nach unserem Beweis von Aufgabe a) ι gleichmäßig stetig ist. □

Aufgabe 7

Seien a, p, m, n wie in der Aufgabenstellung gegeben.

a) Wir zeigen zuerst, dass die geometrische Reihe bezüglich der p-adischen Metrik zur Basis pn in $\mathbb{Z}_p$ konvergiert: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben wir wählen $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $p^{-l} < \varepsilon$ gilt. Dann gilt für alle $N, B > l$ mit $N > B$

$$\begin{aligned} d_p\left(\sum_{k=0}^{N}(np)^k, \sum_{k=0}^{B}(np)^k\right) &= d_p\left(\sum_{k=B+1}^{N}(np)^k, 0\right) \\ &= d_p\left((np)^{B+1}\sum_{k=0}^{N-B}(np)^k, 0\right) \leq p^{-(B+1)} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Weiter gilt

$$(1-np)\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(np)^k - np\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k = \sum_{k=0}^{\infty}(np)^k - \sum_{k=1}^{\infty}(np)^k = 1. \tag{26}$$

Nach dem Hinweis gilt auch $ma + np = 1$, das lässt sich so umschreiben

$$xma + xnp = x \iff mx = \frac{x}{a}(1-np) \iff mx\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k = \frac{x}{a}.$$

Nun zur gleichmäßigen Stetigkeit. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir wählen $\delta = p^{-l}$ mit $l \in \mathbb{N}$ so groß, dass $\delta < \varepsilon$ gilt. Seien $x, y \in a\mathbb{Z}$ mit $d_p(x, y) < \delta$ gegeben. Dann gibt es $w \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = wp^l$. Es folgt dann

$$\begin{aligned} d_p\left(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}\right) = d_p\left(xm\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k, ym\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k\right) &= d_p\left((x-y)m\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k, 0\right) \\ &= d_p\left(wp^l m\sum_{k=0}^{\infty}(np)^k, 0\right) \leq p^l < \varepsilon. \end{aligned}$$

b) Weil $a\mathbb{Z}$ dicht in $\mathbb{Z}$ liegt, welches dicht in $\mathbb{Z}_p$ liegt und die Division nach Teilaufgabe a) gleichmäßig stetig in $a\mathbb{Z}$ ist, kann sie gleichmäßig stetig auf $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$ nach Korollar 1.116 fortgesetzt werden. □