Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

(a) "$\Rightarrow$" Sei f stetig und $V \subseteq Y$ eine offene Menge. Dann ist für alle $i \in I$

$$f|_{U_i}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_i$$

offen bezüglich $\mathcal{T}_{U_i}$, da $f^{-1}(V)$ offen ist.

"$\Leftarrow$" Sei f eine Abbildung mit $f|_{U_i}$ stetig für alle $i \in I$. Sei $V \subseteq Y$ eine offene Menge. Dann ist

$$f|_{U_i}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_i$$

offen bezüglich $\mathcal{T}_{U_i}$ für alle $i \in I$. Mit H4.2 (a) ist nun auch $f^{-1}(V)$ offen bezüglich $\mathcal{T}$, da die U_i eine offene Überdeckung von X bilden.

(b) Diese geht komplett analog zu (a) unter Zuhilfenahme der alternativen Definition der Stetigkeit über abgeschlossene Mengen.

"$\Rightarrow$" Sei f stetig und $V \subseteq Y$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist für alle $C \in \{A, B\}$

$$f|_{C}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap C$$

abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_C$, da $f^{-1}(V)$ abgeschlossen ist.

"$\Leftarrow$" Sei f eine Abbildung mit $f|_C$ stetig für alle $C \in \{A, B\}$. Sei $V \subseteq Y$ eine abgeschlossene Menge. Dann ist

$$f|_{C}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap C_i$$

abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}_C$ für alle $C \in \{A, B\}$. Mit H4.2 (b) ist nun auch $f^{-1}(V)$ abgeschlossen bezüglich $\mathcal{T}$, da $A \cup B = X$.

Aufgabe 2

Aufgrund der Definition des Supremums (kleinste obere Schranke) gilt $\forall\ L \in \mathcal{B}(V, W)$:

$$\begin{aligned}
\|L\| := \|L\|_{V \to W} &= \inf\{C \geq 0 |\ \forall\ x \in V : \|L(x)\|_W \leq C\|x\|_V\} \\
&= \inf\left\{C \geq 0 \middle| C \geq \frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V}\ \forall\ x \in V \text{ mit } x \neq 0\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} \middle| x \in V \text{ mit } x \neq 0\right\}
\end{aligned}$$

(a) $\|\cdot\| := \|\cdot\|_{V \to W}$ ist eine Halbnorm auf $\mathcal{B}(V, W)$:

1. $\|L\| \geq 0$ nach Definition
2. $\forall\ \alpha \in \mathbb{K},\ \forall\ L \in \mathcal{B}(V, W)$ gilt $\|\alpha L\| = \sup\limits_{x \in U, x \neq 0} \left\{|\alpha| \frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V}\right\} = |\alpha| \|L\|$
3. Für $A, B \in \mathcal{B}(V, W)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\|A + B\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|A(x) + B(x)\|_W}{\|x\|_V} &\leq \sup_{x \neq 0} \left\{\frac{\|A(x)\|_W}{\|x\|_V} + \frac{\|B(x)\|_W}{\|x\|_V}\right\} \\
&\leq \sup_{x \neq 0} \left\{\frac{\|A(x)\|_W}{\|x\|_V}\right\} + \sup_{x \neq 0} \left\{\frac{\|B(x)\|_W}{\|x\|_V}\right\} = \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

(b) $\|\cdot\|$ ist eine Norm, wenn $\|\cdot\|_W$ eine Norm ist:
Sei $L \in \mathcal{B}(V,W)$ mit $\|L\| = 0$, d.h. $\sup\limits_{x\neq 0} \frac{\|L(x)\|_W}{\|x\|_V} = 0 \Rightarrow \|L(x)\|_W = 0 \;\forall\; x \neq 0$
$\Rightarrow L(x) = 0 \;\forall\; x \in V \Rightarrow L = 0.$

Aufgabe 3

Sei $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{K}^{n,m}, L_A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n, x \mapsto Ax$. Wir statten $\mathbb{K}^n$ und $\mathbb{K}^m$ mit der l^2-Norm aus, d.h. für $v \in \mathbb{K}^n, w \in \mathbb{K}^m$ haben wir

$$\|v\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |v_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \|w\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{m} |w_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(a) Es gilt für alle $x \in \mathbb{K}^m$

$$||Ax||_2^2 = \sum_{k=1}^{m} \left|\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_l\right|^2 \overset{(\star)}{\leq} \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\right)\left(\sum_{l=1}^{n} |x_l|^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\right)\|x\|_2^2$$

und somit $\|L_Ax\|_2 \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \|x\|_2 \;\forall\, x \in \mathbb{K}^m$, d.h. $\|L_A\|_{2\to 2} \leq \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

$(\star)$ Cauchy-Schwarz bzgl. $\langle v, x\rangle_2 = \sum\limits_{l=1}^{n} \overline{v_l}w_l$ für $v, w \in \mathbb{K}^n$

(b) Sei $m = n$ und $A = \mathbb{E}_n$ die Einheitsmatrix in $\mathbb{K}^{n\times n}$, d.h. $L_A = \mathrm{id}_{\mathbb{K}^n}$. Dann gilt $\|Ax\|_2 = \|x\|_2 \;\forall\; x \in \mathbb{K}^n$, also $\|L_A\| = 1$. Wir haben aber $\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{n}$. Somit ist im Fall $n > 1, \|L_{\mathbb{E}_n}\| < \left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} |a_{kl}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Aufgabe 4

Wir zeigen (b) und folgern (a) als Spezialfall daraus.

(b) Für normierte Räume X, Y und $L \in \mathcal{B}(X,Y)$ ist

$$\|L\|_{X\to Y} := \inf\{C \geq 0 | \;\forall\; x \in X : \|L(x)\|_Y \leq C\|x\|_X\}.$$

Es folgt daher, dass für alle $\varepsilon > 0, x \in U$ und $y \in V$

$$\|L(x)\|_V \leq (\|L\|_{U\to V} + \varepsilon)\|x\|_U$$

und

$$\|M(y)\|_W \leq (\|M\|_{V\to W} + \varepsilon)\|y\|_V$$

gilt. Somit ist auch

$$\|M\circ L(x)\|_W = \|M(L(x))\|_W \leq (\|M\|_{V\to W}+\varepsilon)\|L(x)\|_V \leq (\|M\|_{V\to W}+\varepsilon)(\|L\|_{U\to V}+\varepsilon)\|x\|_U.$$

Damit gilt für alle $\varepsilon > 0$

$$\|M \circ L(x)\|_{U\to W} \leq (\|M\|_{V\to W} + \varepsilon)(\|L\|_{U\to V} + \varepsilon).$$

Für $\varepsilon \to 0$ folgt schließlich

$$\|M \circ L(x)\|_{U\to W} \leq (\|M\|_{V\to W}(\|L\|_{U\to V}).$$

(a) folgt aus (b) für $U = \mathbb{K}^n, V = \mathbb{K}^m, W = \mathbb{K}^l, L = A$ und $M = B$.

Aufgabe 5

Wir geben die stetige Fortsetzung von q an indem wir eine Abbildung

$$Q : (\mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \backslash \{(0,0), (\infty, \infty)\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

mit $Q(x) = q(x) \; \forall \; x \in \mathbb{C} \times (\mathbb{C} \backslash \{0\})$ definieren. Dazu setzen wir:

$$Q(x, 0) = \infty \; \forall \; x \in \mathbb{C} \backslash \{0\},$$

$$Q(x, \infty) = 0 \; \forall \; x \in \mathbb{C}$$

und

$$Q(\infty, x) = \infty \; \forall \; x \in \mathbb{C}.$$

Jetzt zeigen wir, dass Q stetig ist. Auf dem Bereich von $Q(x) = q(x)$ ist dies klar.

Fall 1: $(x, 0), x \neq 0$

Sei $x \neq 0$, wir zeigen, dass Q in $(x, 0)$ stetig ist. Wir müssen also zu jeder Umgebung U von $Q(x, 0)$ eine Umgebung U' von $(x, 0)$ finden, sodass $Q(U') \subseteq U$. Aus $Q(x, 0) = \infty$ und der Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ folgt, dass

$$\exists \; r \in \mathbb{R} \; \forall \; z \in \mathbb{C} : |z| > r \Rightarrow z \in U$$

Setze

$$U' := \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \backslash \{(0,0), (\infty, \infty)\} \middle| |x - z_1| < \frac{|x|}{2} \wedge |z_2| < \frac{|x|}{2(r+1)} \right\}.$$

Dann ist U' offen und

$$|Q(z)| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| \geq \frac{\frac{|x|}{2}}{\frac{|x|}{2(r+1)}} = r + 1 > r \Rightarrow Q(z) \in U$$

gilt für alle $z \in U'$. Damit ist Q stetig in $(x, 0)$.

Fall 2 : $(x, \infty), x \neq \infty$

Sei nun $x \in \mathbb{C}$, wir zeigen, dass Q in (x, ∞) stetig ist für $x \in \mathbb{C}$. Sei $r > 0$ und $U_{1/r}(0)$ der offene Ball mit Radius $1/r$ um den Punkt 0. Setze

$$U_r'(x, \infty) = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \backslash \{(0,0), (\infty, \infty)\} \| x - z_1| < r \wedge |z_2| > (|x| + r)(r+1)\}.$$

Damit ist U' offen und es gilt

$$|Q(z)| = \left| \frac{z_1}{z_2} \right| < \frac{|x| + r}{(r+1)(|x| + r)} = \frac{1}{r+1} < \frac{1}{r} \Rightarrow Q(z) \in U_{1/r}(0)$$

für alle $z \in U'$.

Fall 3: $(\infty, x), x \neq \infty$

Sei $x \in \mathbb{C}$, wir zeigen, dass Q in $(\infty, x), x \neq 0$ stetig ist. Sei U eine offene Umgebung um (∞, x). Aus $Q(\infty, x) = \infty$ und der Standardtopologie auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ folgt, dass

$$\exists \; r \in \mathbb{R} \; \forall \; z \in \mathbb{C} : |z| > r \Rightarrow z \in U$$

Setze

$$U' := \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \backslash \{(0,0), (\infty, \infty)\} \middle| |z_1| > (r+1)\frac{3|x|}{2} \wedge |x - z_2| < \frac{|x|}{2} \right\}.$$

Dann ist U' offen und

$$|Q(z)| = \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \geq \frac{(r+1)\frac{3|x|}{2}}{|x| + \frac{|x|}{2}} = r+1 > r \Rightarrow Q(z) \in U$$

für alle $z \in U'$. Damit ist Q stetig in $(\infty, x), x \neq 0$.
Für den Punkt $(\infty, 0)$ setze

$$U_0' := \left\{ z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C} \cup \{\infty\})^2 \backslash \{(0,0), (\infty,\infty)\} \| z_1| > 2(r+1) \wedge |z_2| < \frac{1}{2} \right\}.$$

U_0' ist auch offen mit $|Q(z)| = r+1 > r \Rightarrow Q(z) \in U$ für alle $z \in U_0'$.

Bleibt zu zeigen, dass es keine stetige Fortsetzung von q nach $(0,0)$ gibt. Das sieht man wie folgt:
Die Folge $a_n = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$ konvergiert für $n \to \infty$ gegen $(0,0)$ und $q(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}) = 1 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$. Also müsste $q(0,0) := 1$ gesetzt werden. Aber die Folge $b_n = (\frac{1}{n}, -\frac{1}{n}), n \in \mathbb{N}$ konvergiert für n gegen Unendlich auch gegen $(0,0)$, jedoch ist $q(b_n) = -1 \; \forall \; n \in \mathbb{N}$. Hier müsste $q(0,0) = -1$ gesetzt werden.
Analog für den Punkt (∞, ∞) mit den Folgen (n, n) und $(n, -n)$.

Aufgabe* 6

(a) Wir erinnern uns daran, dass für jedes $k \in \mathbb{Z}, v_p(k) \in \mathbb{N}_0$ die höchste Potenz der Primzahl p in der Primfaktorzerlegung von k ist, d.h. $k = mp^{v_p(k)}$, wobei $\mathrm{ggT}(m.p) = 1, m \in \mathbb{N}$. Setze also $kl = rp^{v_p(kl)}$, wobei $\mathrm{ggT}(r,p) = 1$, für $l \in \mathbb{N}$ und ein $r \in \mathbb{N}$. Andererseits haben wir auch

$$kl = (p^{v_p(k)}m)(p^{v_p(l)}n) = mnp^{v_p(k)+v_p(l)},$$

mit $\mathrm{ggT}(m,p) = 1$ und $\mathrm{ggT}(n,p) = 1$. Da p eine Primzahl ist, ist auch $\mathrm{ggT}(mn,p) = 1$. Somit gilt $mn|rp^{v_p(kl)}$ ($mn|rp^{v_p(kl)}$ bedeutet mn teilt $rp^{v_p(kl)}$). Da $\mathrm{ggT}(mn,p) = 1$, folgt $mn|r$. Analog bekommen wir $r|mn$, also $r = mn$ und $v_p(k) + v_p(l) = v_p(kl)$.

(b) Wir zeigen für folgende Abbildung gleichmäßige Stetigkeit:

$$\begin{array}{cc} + : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p) & \cdot : (\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, d) \to (\mathbb{Z}, d_p) \\ (k,l) \mapsto k + l & (k, l \mapsto k \cdot l) \end{array}$$

Wir erinnern an die Definition der Produktmetrik:

$$d((k,l),(m,n)) = \max\{d_p(k,m), d_p(l,n)\}.$$

Beginnen wir mit "+".

$$\begin{aligned} d_p(k+l, m+n) = p^{-v_p(k-m+l-n)} &\leq \max\{p^{-v_p(k-m)}, p^{-v_p(l-n)}\} \\ &= \max\{d_p(k,l), d_p(l,n)\} = d((k,l)(m,n)), \end{aligned}$$

wobei in der ersten Ungleichung folgende Eigenschaft aus Beispiel 1.2.3 verwendet wurde:

$$\forall \; a, b \in \mathbb{Z}, p^{-v_p(a+b)} \leq \max\{p^{-v_p(a)}, p^{-v_p(b)}\}. \qquad (\star)$$

Sei $\varepsilon > 0$ und setze $\delta = \varepsilon$. Dann gilt für jedes $(k,l),(m,n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $d((k,l),(m,n)) \leq \delta = \varepsilon$

$$d_p(k+l, m+n) \leq d((k,l),(m,n)) \leq \varepsilon.$$

Dies zeigt die gleichmäßige Stetigkeit von “+“.
Nun zu “ $\cdot$ “.

$$\begin{aligned} d_p(kl,mn) &= p^{-v_p(kl-mn)} = p^{-v_p(kl-lm+lm-mn)} = p^{-v_p(l(k-m)+m(l-n))} \\ &\leq \max\{p^{-(v_p(k-m)+v_p(l))}, p^{-(v_p(l-n)+v_p(m))}\} \\ &\leq \max\{p^{-v_p(k-m)}, p^{-v_p(l-n)}\} = d((k,l)(m,n)). \end{aligned}$$

Die erste Ungleichung erhalten wir unter Verwendung von ($\star$) und Aufgabenteil (a). Die zweite Ungleichung gilt, da $p^{-v_p(l)} < 1$ und $p^{-v_p(m)} < 1$.
Der Rest folgt nun analog zu “ + “.