Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

a) Wir zeigen, dass die Relativtopologie eine Topologie ist, indem wir die definierenden Eigenschaften einer Topolgie durchgehen.

1) $\emptyset \in \mathcal{T}$ und $X \in \mathcal{T}$ gelten, weshalb auch $\emptyset, A \in \mathcal{T}_A$ erfüllt sind.
2) Seien $B, C \in \mathcal{T}_A$ gegeben. Dann gibt es $B', C' \in \mathcal{T}$ mit $B = B' \cap A$ und $C = C' \cap A$. Dann gilt
$$B \cap C = (B' \cap A) \cap (C' \cap A) = A \cap (B' \cap C') \in \mathcal{T}_A, \tag{1}$$
denn $(B' \cap C') \in \mathcal{T}$ gilt nach (1) in der Definition der Topolgie.
3) Sei nun eine Folge $(U_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}_A$ gegeben, dann gibt es nach Definition von $\mathcal{T}_A$ eine Folge $(U'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}$ mit $U_n = U'_n \cap A$, damit folgt
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap U'_n) = A \cap \bigcup_{n\in\mathbb{N}} U'_n \in \mathcal{T}_A, \tag{2}$$
aufgrund von (2) in der Definition der Topologie.

b) Wir berufen uns in diesem Beweis an die alternative Charakterisierung von Berührpunkt:

Lemma 1. *Sei $(Y, \mathcal{T}')$ ein topologischer Raum und seien $x \in Y$ und $B \subseteq Y$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

A) x ist ein Berührpunkt von B
B) Für alle offenen Umgebungen von x, U_x gilt: $U_x \cap B \neq \emptyset$.

Für den Beweis siehe die Lösung von Aufgabe T4.3.

Wir müssen also zeigen, dass ein beliebiger Punkt aus X ein Berührpunkt von $B \subseteq A \subseteq X$ ist wenn $\overline{B}^{\mathcal{T}_A} = A$ und $\overline{A}^{\mathcal{T}} = X$ gelten. Sei dafür $y \in X$ gegeben. Wir wählen $U \in \mathcal{T}$ mit $y \in U$ aus. Dann gilt nach Lemma 1:
$$\emptyset \neq U \cap A \in \mathcal{T}_A \tag{3}$$
und nach erneuter Anwendung von Lemma 1 folgt
$$\emptyset \neq (U \cap A) \cap B. \tag{4}$$
Daher gilt insbesondere $U \cap B \neq \emptyset$. Also ist y ein Berührpunkt von B. □

Aufgabe 2

Seien I,$(X, \mathcal{T})$,$(U_i)_{i\in I}$ wie in der Aufgabenstellung.

a) Sei $Y \subseteq X$ gegeben. Wir zeigen zuerst "i→ii": Dieser Schritt folgt direkt aus der Definition der Relativtopologie. Nun zu "ii→i", nun ist zu zeigen, dass Y offen ist. Zuerst stellen wir fest, dass für jedes $i \in I$
$$Y \cap U_i \in \mathcal{T} \tag{5}$$

erfüllt ist, denn $Y \cap U_i \in \mathcal{T}_{U_i}$ heißt es gibt ein $U \in \mathcal{T}$ welches $U \cap U_i = Y \cap U_i$ erfüllt. Die linke Seite dieser Gleichung ist eine offene Menge, also ist auch die rechte Seite offen. Damit folgt

$$Y^\circ = \bigcup_{\substack{W \in \mathcal{T} \\ W \subseteq Y}} W \supseteq \bigcup_{i \in I} (Y \cap U_i) = Y \cap \bigcup_{i \in I} U_i = Y \cap X = Y, \tag{6}$$

nachdem $Y^\circ \subseteq Y$ immer gilt, ist also die Menge Y gleich ihrem Inneren und damit offen.

b) Seien $A, B, Y \subseteq X$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Eine der beiden Implikationen, "$i \Rightarrow ii$", gilt direkt nach Definition der Relativtopologie. Wir zeigen also nur "$ii \Rightarrow i$". Sei $x \in Y$ gegeben. Wir gehen zwei Fälle durch:

   1) $x \in \partial A \cap \partial B$: In diesem Fall gilt einerseits $x \in A$. Da $Y \cap A \in \mathcal{T}_A$ ist, gibt es ein $U_x \in \mathcal{T}$ welches $x \in U_x \cap A \subseteq Y \cap A$ erfüllt. Andererseits gilt auch $x \in B$ und $Y \cap B \in \mathcal{T}_B$. Deshalb gibt es auch ein $U'_x \in \mathcal{T}$ welches $x \in U'_x \cap B \subseteq Y \cap B$ erfüllt. Dann ist $U := U_x \cap U'_x$ offen bezüglich $\mathcal{T}$, enthält x und erfüllt

   $$U \cap A \subseteq U_x \cap A \subseteq Y \cap A \wedge U \cap B \subseteq U'_x \cap B \subseteq Y \cap B. \tag{7}$$

   Damit ist U eine Teilmenge von Y und x ein innerer Punkt von Y.

   2) $x \notin \partial A \vee x \notin \partial B$: Wir wollen auch in diesem Fall zeigen, dass x ein innerer Punkt von Y ist. o.B.d.A. nehmen wir, $x \notin \partial A$ an (der Fall $x \notin \partial B$ geht analog). Falls zudem $x \in A$ gilt, sind wir fertig, weil daraus $x \in A^\circ$ folgt. Wir nehmen also auch noch $x \notin A$ an. Daraus folgt allerdings $x \in B$, denn es gilt$A \cup B = X$. Es gilt aber auch $\partial B \subseteq A$, da $A \cup B = X$ und sowohl A als auch B abgeschlossen sind. Also folgt $x \in B^\circ$. □

Aufgabe 3

a) Seien $(M, \mathcal{T}), \sim, k$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Wir zeigen, dass $\mathcal{T}_\sim$ eine Topologie ist indem wir dessen Definition durchgehen.

   A) Es gilt $\mathcal{T} \ni \emptyset = k^{-1}[\emptyset], M = k^{-1}[M/\sim] \in \mathcal{T}$, also gilt auch $\emptyset, M/\sim \in \mathcal{T}_\sim$.

   B) Seien $A, B \in \mathcal{T}_\sim$ gegeben, dann gilt

   $$\mathcal{T} \ni k^{-1}[A] \cap k^{-1}[B] = \{x \in M \mid k(x) \in A\} \cap \{x \in M \mid k(x) \in B\} \tag{8}$$
   $$= \{x \in M \mid k(x) \in A \cap B\} = k^{-1}[A \cap B]. \tag{9}$$

   Also ist auch $A \cap B \in \mathcal{T}_\sim$ erfüllt.

   C) Seien I eine Indexmenge und $(U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ gegeben. Dann gilt

   $$\mathcal{T} \ni \bigcup_{i \in I} k^{-1}[U_i] = \bigcup_{i \in I} \{x \in M \mid k(x) \in U_i\} = \left\{ x \in M \mid \bigcup_{i \in I} U_i \right\} = k^{-1} \left[\bigcup_{i \in I} U_i \right], \tag{10}$$

   also auch $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}_\sim$.

b) Seien nun d, d', $(\mathcal{T}_d)_\sim, \mathcal{T}_{d'}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Wir zeigen zuerst $(\mathcal{T}_d)_\sim \subseteq \mathcal{T}_{d'}$. Seien dafür $A \in (\mathcal{T}_d)_\sim$ und $[x] \in A$ gegeben. Weil A in der Quotiententopologie offen ist, ist sein Urbild offen in der Ursprünglichen Topologie. Diese wird aber durch die Metrik d erzeugt, also finden wir eine $\varepsilon-$Umgebung von einem Vertreter von $[x]$ die im Urbild von A enthalten ist. Wähle daher $\varepsilon > 0, \hat{x} \in [x]$, sodass $U^\varepsilon_d(\hat{x}) \subseteq k^{-1}[A]$ gilt. Dann ist $U^\varepsilon_{d'}(x) \subseteq A$ erfüllt, denn sei $[y] \in U^\varepsilon_{d'}([x])$ und $\hat{y} \in [y]$ beliebig gewählt, dann gilt

$$\varepsilon > d'(y, x) = d(\hat{y}, \hat{x}) \tag{11}$$

und daher auch $\hat{y} \in U_d^\varepsilon(\hat{x}) \subseteq k^{-1}[A]$ und damit $k[\hat{y}] = [y] \in A$. Damit ist A auch offen bezüglich $\mathcal{T}_{d'}$.

Nun zeigen wir $\mathcal{T}_{d'} \subseteq (\mathcal{T}_d)_\sim$. Sei dafür $M/\sim \supseteq B \in \mathcal{T}_{d'}$ gegeben. Wir nehmen o.B.d.A. $B \neq \emptyset$ an. Das bedeutet, dass es für jedes $[x] \in B$ ein $\varepsilon > 0$ gibt, sodass

$$U_{d'}^\varepsilon([x]) \subseteq B \subseteq M/\sim \tag{12}$$

gilt. Dann ist zu zeigen, dass $k^{-1}[B] \in \mathcal{T}$ gilt. Wähle dafür $\hat{x} \in k^{-1}[B]$ und definiere $k(\hat{x}) =: [x]$. Wir wählen nun ein $\varepsilon > 0$, sodass (12) für $[x]$ erfüllt ist. Sei außerdem $\hat{y} \in U_d^\varepsilon(\hat{x})$, damit folgt

$$\varepsilon > d(\hat{y}, \hat{x}) = d'(k(\hat{y}), [x]) \tag{13}$$

also gilt $k(\hat{y}) \in U_{d'}^\varepsilon(x) \subseteq B$ und damit auch $\hat{y} \in k^{-1}[B]$. Nachdem $\hat{y}$ beliebig gewählt war, gilt damit $U_d^\varepsilon(\hat{x}) \subseteq k^{-1}[B]$ und damit ist $k^{-1}[B]$ offen bezüglich $\mathcal{T}$. □

Aufgabe 4

a) Seien $M_1, M_2, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Wie immer gehen wir die Definition der Topologie durch um zu überprüfen ob $\mathcal{T}$ eine Topologie ist.

  A) Da $\mathcal{T}_1 \ni \emptyset, M_1$ und $\mathcal{T}_2 \ni \emptyset, M_2$ Topologien sind, gelten $\emptyset \times \emptyset = \emptyset \in \mathcal{T}$ und $M_1 \times M_2 \in \mathcal{T}$.

  B) Seien $A, B \in \mathcal{T}$ gegeben, nehme **o**hne **B**eschränkung **d**er **A**llgemeinheit $\emptyset \neq A \cap B \ni z = (x, y)$ an. Dann gilt insbesondere $z \in A$ und $z \in B$, weshalb wir $U_{1,A}, U_{1,B} \in \mathcal{T}_1$ und $U_{2,A}, U_{2,B} \in \mathcal{T}_2$ mit

$$x \in U_{1,A} \wedge x \in U_{1,B} \wedge y \in U_{2,A} \wedge y \in U_{2,B} \tag{14}$$

  und

$$U_{1,A} \times U_{2,A} \subseteq A \wedge U_{1,B} \times U_{2,B} \subseteq B \tag{15}$$

  wählen. Dann gilt insbesondere

$$x \in U_{1,A} \cap U_{1,B} \in \mathcal{T} \wedge y \in U_{2,A} \cap U_{2,B} \tag{16}$$

  und daher auch $z \in U_{1,A} \cap U_{1,B} \times U_{2,A} \cap U_{2,B} \in \mathcal{T}$ und $U_{1,A} \cap U_{1,B} \times U_{2,A} \cap U_{2,B} \subseteq A \cap B$. Daraus folgt die zu zeigende Aussage $A \cap B \in \mathcal{T}$.

  C) Seien I eine Indexmenge und $(U_i)_{i \in I} \subseteq \mathcal{T}$ gegeben. Nehme **o**hne **B**eschränkung **d**er **A**llgemeinheit $\emptyset \neq \bigcup_{i \in I} U_i \ni z = (x, y)$ an. Sei $k \in I$ so, dass $z \in U_k$ gilt. Wähle daher $U_\alpha \in \mathcal{T}_1$ und $U_\beta \in \mathcal{T}_2$, die

$$x \in U_\alpha \wedge y \in U_\beta \wedge U_\alpha \times U_\beta \subseteq U_k \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i \tag{17}$$

  erfüllen. Die Existenz dieser Umgebungen von x und y wird durch die Existenz von $k \in I$ gewährleistet. Damit gilt $\bigcup_{i \in I} U_i \in \mathcal{T}$ □

b) Seien $M_1, M_2, d_1, d_2, d, \mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ und $\mathcal{T}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Wir bezeichnen die durch d erzeugte Topologie mit $\mathcal{T}_d$. Wie üblich zeigen wir $\mathcal{T} = \mathcal{T}_d$ in zwei Schritten.

  Zuerst zeigen wir $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{T}_d$. Sei dafür $U \in \mathcal{T}$ gegeben. Nehme **o**hne **B**eschränkung **d**er **A**llgemeinheit $\emptyset \neq U$ an. Wähle $(x, y) = z \in U$, wähle dann $U_1 \in \mathcal{T}_1$ und $U_2 \in \mathcal{T}_2$ mit $x \in U_1$ und $y \in U_2$ und

$$U_1 \times U_2 \subseteq U. \tag{18}$$

  Sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wähle $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ so klein, dass $U_{d_1}^{\delta_1}(x) \subseteq U_1$ und $U_{d_2}^{\delta_2}(x) \subseteq U_2$ erfüllt sind. Dann folgt auch

$$z \in U_{d_1}^{\min\{\varepsilon,\delta_1,\delta_2\}}(x) \times U_{d_2}^{\min\{\varepsilon,\delta_1,\delta_2\}}(y) = U_d^{\min\{\varepsilon,\delta_1,\delta_2\}}(z) \subseteq U_1 \times U_2 \subseteq U, \tag{19}$$

also ist z ein innerer Punkt von U bezüglich $\mathcal{T}_d$.

Nun zu $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}$: Sei o.B.d.A. $(x, y) = z \in U \in \mathcal{T}_d$ gegeben. Wähle $\varepsilon > 0$ mit

$$U_d^\varepsilon(z) \subseteq U, \tag{20}$$

dann gilt aufgrund der Maximumsstruktur von d

$$U_{d_1}^\varepsilon(x) \times U_{d_2}^\varepsilon(y) = U_d^\varepsilon(z). \tag{21}$$

Dies bedeutet aber $U \in \mathcal{T}$.

c) Die auf $\mathbb{C}$ durch die auf $\mathbb{C}$ definierte Norm induzierte Topologie bezeichnen wir mit $\mathcal{T}_\mathbb{C}$, während die Produkttopologie mit $\mathcal{T}$ bezeichnet wird. Es ist also $\mathcal{T}_\mathbb{C} = \mathcal{T}$ zu zeigen. Sei für $\mathcal{T}_\mathbb{C} \subseteq \mathcal{T}$, o.B.d.A. $\emptyset \neq U \in \mathcal{T}_\mathbb{C}$ gegeben. Sei $x + iy = z \in U$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei $\varepsilon > 0$ so klein, dass $U_\varepsilon^\mathbb{C}(z) \subseteq U$ gilt. Dann gilt

$$W := U_{\varepsilon/\sqrt{2}}^\mathbb{R}(x) \times U_{\varepsilon/\sqrt{2}}^\mathbb{R}(y) \subseteq U_\varepsilon^\mathbb{C}(z). \tag{22}$$

Das sieht man wie folgt ein: Sei $(b_1, b_2) = b \in U_{\varepsilon/\sqrt{2}}^\mathbb{R}(x) \times U_{\varepsilon/\sqrt{2}}^\mathbb{R}(y)$ gegeben. Dann folgt

$$|b - z| = \sqrt{(b_1 - x)^2 + (b_2 - y)^2} < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon. \tag{23}$$

Damit ist z auch bezüglich $\mathcal{T}_\mathbb{C}$ ein innerer Punkt, also ist U auch in dieser Topologie offen.

Sei umgekehrt o.B.d.A. $z \in U \in \mathcal{T}$ gegeben. Dann gibt es $\varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ und $(x, y) = z \in U$ mit

$$U_{\varepsilon_1}^\mathbb{R}(x) \times U_{\varepsilon_2}^\mathbb{R}(y) \subseteq U. \tag{24}$$

Definiere $\varepsilon = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$. Weil für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $|a + ib| \geq \max\{|a|, |b|\}$ gilt folgt

$$U_\varepsilon^\mathbb{C}(z) \subseteq U_\varepsilon^\mathbb{R}(x) \times U_\varepsilon^\mathbb{R}(y) \subseteq U. \tag{25}$$

Damit ist U auch offen bezüglich $\mathcal{T}_\mathbb{C}$ $\square$

Aufgabe 5

Es ist also zu zeigen, dass $\overline{C([a,b],\mathbb{K})}^{\|\cdot\|_2} = \mathcal{R}([a,b],\mathbb{K},\|\cdot\|_2)$ gilt. Wir zeigen zuerst den Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ und verallgemeinern anschließend. Der Beweis geschieht in mehreren Schritten. In Schritt 1 finden wir eine Folge in $C([a,b],\mathbb{K})$ welche gegen eine beliebige Indikatorfunktion konvergiert. In Schritt 2 verallgemeinern wir dieses Ergebnis auf Stufenfunktionen. In Schritt 3 zeigen wir, dass die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen gleich dem Abschluss der Stufenfunktionen ist und schließlich führen wir alles zusammen.

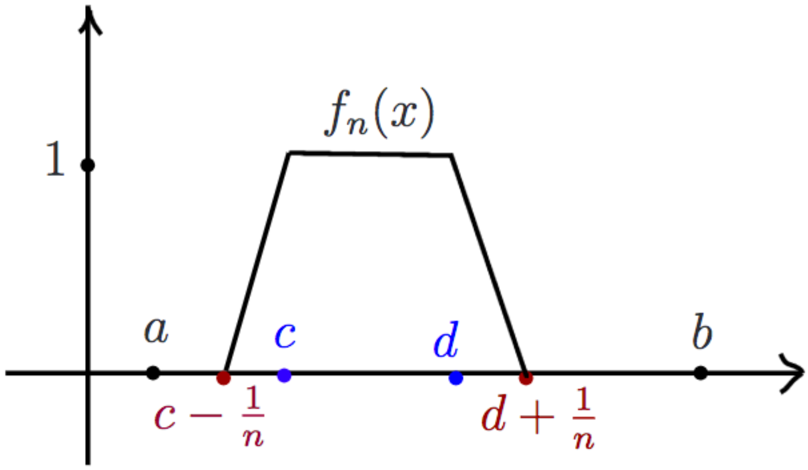
1) Es sei 1_I eine Indikatorfunktion des Intervalls $I \subseteq [a,b] \subseteq \mathbb{R}$. Sei $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Familie von stetigen Funktionen definiert durch

$$f_n(x) = \max\{1 - n\mathrm{dist}(x, I), 0\}, \tag{26}$$

für $x \in [a,b]$, mit dist wie in der Aufgabenstellung. Wir definieren $c := \inf\{x \in I\}$ und $d := \sup\{x \in I\}$ Es gilt für $x \in [a,b]$

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & x \in I \\ n\left(x - c + \frac{1}{n}\right) & c - \frac{1}{n} \leq x \leq c \\ -n\left(x - d - \frac{1}{n}\right) & d \leq x \leq d + \frac{1}{n} \\ 0 & \mathrm{dist}(x, I) \geq \frac{1}{n} \end{cases} \tag{27}$$

, woraus direkt abgelesen werden kann, dass f_n stetig ist.



Damit ist

$$\|f_n - 1_I\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f_n(x) - 1_I(x)|^2 \mathrm{d}x} = \sqrt{\int_J |f_n(x) - 1_I(x)|^2 \mathrm{d}x} \tag{28}$$

$$\leq \sqrt{\int_{\left[c-\frac{1}{n},c\right]\cup\left[d,d+\frac{1}{n}\right]} \mathrm{d}x} = \sqrt{\frac{2}{n}} \tag{29}$$

erfüllt. Also gilt $f_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} 1_I$.

2) Sei eine Stufenfunktion$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben. Die Funktion f kann als Linearkombination von Indikatorfunktionen geschrieben werden, wähle $n \in \mathbb{N}$ und paarweise disjunkte $(I_k)_{k\in\{1,\dots,n\}} \subseteq [a,b]^n$, sodass

$$\forall x \in [a,b] : f(x) = \sum_{k=1}^{n} 1_{I_k}(x) \tag{30}$$

gilt. Mit Schritt 1 finden wir $(f_{b,k})_{k\in\{1,\dots,n\},b\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b],\mathbb{R})$, die $f_{b,k} \xrightarrow[b\to\infty]{\|\cdot\|_2} 1_{I_k}$ erfüllen. Damit gilt

$$\sum_{k=1}^{n} f_{b,k} \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} \sum_{k=1}^{n} 1_{I_k}. \tag{31}$$

Aufgrund dieser Konvergenz gilt also für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $f \in \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$(Notation für die Menge der Stufenfunktionen aus Analysis 1)

$$U_\varepsilon^{\|\cdot\|_2}(f) \cap C([a,b],\mathbb{R}) \neq \emptyset. \tag{32}$$

Es folgt $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{C([a,b],\mathbb{R})}$.

3) Wir erinnern uns an die Definition des Riemann-Integrals einer Funktion $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\substack{g\in\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \\ g\leq f}} \int_a^b g(x)\mathrm{d}x. \tag{33}$$

Daher gibt es für jedes $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ eine monoton steigende Familie von Stufenfunktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$(also $n > n' \Rightarrow g_n > g_{n'}$) welche

$$\forall \varepsilon' > 0\ \exists N \in \mathbb{N}\ \forall n > N : \int_a^b f(x) - g_n(x)\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x) - g_n(x)|\mathrm{d}x < \varepsilon' \tag{34}$$

erfüllen. Sei $\varepsilon > 0$ und o.B.d.A. $0 < f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$ (für f negativ führe das Argument mit umgedrehten Vorzeichen, falls f abschnittsweise positiv und negativ führe das Argument für jeden Abschnitt getrennt durch) gegeben. Wir wählen eine monoton steigende Familie von Stufenfunktionen $(g'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$ nach (34) für $\varepsilon' = \frac{\varepsilon^2}{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|}$. Das ist wohldefiniert weil f Riemann-integrierbar und damit beschränkt ist. Nachdem $f > 0$ ist, bilden wir eine neue Familie $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})$, welche $g_n \geq 0$ erfüllt indem wir die ersten Glieder weglassen. Dann gilt

$$\|f - g_n\| = \sqrt{\int_a^b |f(x) - g_n(x)|^2} \leq \sqrt{\int_a^b |f(x)||f(x) - g_n(x)|} \tag{35}$$

$$\leq \sqrt{\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \int_a^b |f(x) - g_n(x)|} < \sqrt{\sup_{x\in[a,b]} |f(x)| \frac{\varepsilon^2}{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)|}} = \varepsilon \tag{36}$$

, also folgern wir $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \subset \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})}$ und damit $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})}$.

Nun zur zusammenführung der Schritte. Wir wissen nun also $\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{C([a,b],\mathbb{R})}$ aus Schritt 2 und $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) = \overline{\mathcal{T}([a,b],\mathbb{R})}$ aus Schritt 3, damit folgt $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) \subseteq \overline{C([a,b],\mathbb{R})}$. Die umgekehrte Inklusion ist klar, weil jede stetige Funktion Riemann-integrierbar ist und die Menge der Riemann-integrierbaren Funktionen abgeschlossen bezüglich der durch $\|\cdot\|_2$ induzierten Topologie ist. Also gilt $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{R}) = \overline{C([a,b],\mathbb{R})}$.
Es bleibt noch der Fall $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Der Definition nach sind komplexe Funktionen Riemann-integrierbar genau dann wenn ihr Real- und Imaginärteil separat Riemann-integrierbar sind. Sei $f \in \mathcal{R}([a,b],\mathbb{R})$. Nach dem bisherigen Beweis finden wir Familien von stetige Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}, (h_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b],\mathbb{R})$, welche

$$g_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} \mathrm{Re}(f) \wedge h_n \xrightarrow[n\to\infty]{\|\cdot\|_2} \mathrm{Im}(f) \tag{37}$$

erfüllen. Wähle $(g_n + ih_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b],\mathbb{C})$. Diese Familie von stetigen Funktionen approximiert f, weil

$$\|f - g_n - ih_n\|_2^2 = \int_a^b |\mathrm{Re}(f(x)) - g_n(x)|^2 \mathrm{d}x + \int_a^b |\mathrm{Im}(f(x)) - h_n(x)|^2 \mathrm{d}x \xrightarrow{n\to\infty} 0 \tag{38}$$

gilt. Die umgekehrte Inklusion folgt genauso wie im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Damit gilt auch $\mathcal{R}([a,b],\mathbb{C}) = \overline{C([a,b],\mathbb{C})}$.

Aufgabe 6

a) Seien $k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0$ und p eine Primzahl gegeben. Es ist zu zeigen, dass die Mengen $k + p^m\mathbb{Z}$ offen und abgeschlossen sind. In Anlehnung an die Lösung von Aufgabe T4.1 untersuchen wir 1. $U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k)$ und 2. $B^{d_p}_{p^{-m}}(k)$

1. Sei $x \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir unterscheiden drei Fälle
   A) Es gilt $x - k = 0$. In diesem Fall gilt $x \in U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k)$.
   B) $x - k$ ist nicht durch p^m teilbar. In diesem Fall gilt $d_p(x,k) \geq p^{-m+1}$ und daher $x \notin U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k)$
   C) Es gilt $\frac{x-k}{p^m} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. In diesem Fall gilt $d_p(x,k) \leq p^{-m} < p^{-m+1}$, also auch $x \in U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k)$.

   Zusammenfassend gilt $k + p^m\mathbb{Z} = U^{d_p}_{p^{-m+1}}(k)$, damit ist $k + p^m\mathbb{Z}$ nach Definition der durch d_p erzeugten Topologie offen.
2. Sei wieder $x \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir unterscheiden wieder drei Fälle

A) Es gilt $x-k=0$. In diesem Fall gilt $x \in B^{d_p}_{p^{-m}}(k)$.

B) $x-k$ ist nicht durch p^m teilbar. In diesem Fall gilt $d_p(x,k) \geq p^{-m+1} > p^{-m}$ und daher $x \notin B^{d_p}_{p^{-m}}(k)$

C) Es gilt $\frac{x-k}{p^m} \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. In diesem Fall gilt $d_p(x,k) \leq p^{-m}$, also auch $x \in B^{d_p}_{p^{-m}}(k)$.

Zusammenfassend gilt $k + p^m\mathbb{Z} = B^{d_p}_{p^{-m}}(k)$, damit ist $k + p^m\mathbb{Z}$ nach Aufgabe T4.1 abgeschlossen.

Die Menge in Frage ist also offen und abgeschlossen. Das zeigt, dass es topologische Räume gibt in denen nicht alle Mengen die abgeschlossen und offen sind gleich der leeren Menge oder dem ganzen Raum sind. Häufig nennt man Untermengen eines Topologischen Raumes die offen und abgeschlossen sind getrennte Komponenten, dieser Begriff wird anschaulicher an kontinuierlichen Beispielen Solcher Räume (Wie die Relativtopologie (der Standardtopologie von $\mathbb{R}^3$) auf der Vereinigung zweier 2-Sphären mit Radius 1 und Abstand 3).

b) Seien p eine Primzahl, $a \in \mathbb{Z}$ nicht durch p teilbar und $x \in \mathbb{Z}$ gegeben. Es ist zu zeigen, dass

$$\forall \varepsilon > 0, \exists y \in a\mathbb{Z} : d_p(y,x) < \varepsilon \tag{39}$$

gilt. Sei dafür $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei weiterhin $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass

$$p^{-m} < \varepsilon \tag{40}$$

gilt. Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{Z} \to \{0, \ldots, p^m - 1\}$ mit

$$\forall y \in \mathbb{Z} : f(y) = (ay - x)\mathrm{mod}(p^m). \tag{41}$$

Behauptung. *Die Funktion f ist surjektiv.*

Beweis der Behauptung: Nehmen wir für einen Widerspruch an, dass dies nicht der Fall ist. Dann muss es $y', y'' \in \mathbb{Z}$ geben mit $f(y') = f(y'')$ und $|y' - y''| < |\{0, \ldots, p^m - 1\}| = p^m$, weil f ja nur p^m unterschiedliche Werte annehmen kann und nicht alle angenommen werden (Annahme f nicht surjektiv). Daraus folgt aber direkt

$$0 = f(y') - f(y'') = (ay' - x - ay'' + x)\mathrm{mod}(p^m) \tag{42}$$

also auch

$$\mathbb{Z} \ni \frac{ay' - ay''}{p^m} = a\frac{y' - y''}{p^m}. \tag{43}$$

Das steht jedoch im Widerspruch dazu, dass a nicht durch p teilbar ist und $|y' - y''| < p^m$ gilt. Die Behauptung gilt also.

Weil f surjektiv ist, wählen wir ein $y \in \mathbb{Z}$, sodass $(ay - x)\mathrm{mod}(p^m) = 0$ gilt. Das ist gleichbedeutend mit

$$\exists b \in \mathbb{Z} : (ay - x) = p^m b, \tag{44}$$

damit gilt dann, dass die Vielfachheit von $ay \in a\mathbb{Z}$ bezüglich p mindestens m beträgt. Also folgt $d_p(ay, x) \leq p^{-m} < \varepsilon$. □