Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Für $f = 0$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt, wir können also $f \neq 0$ annehmen. Für $g \in C([a,b],\mathbb{K})$ mit $\|g\|_q \leq 1$ gilt $\forall\ f \in C([a,b],\mathbb{K})$

$$\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\,\mathrm{d}x\right| \overset{T3.2}{\leq} \|f\|_p\|g\|_q \leq \|f\|_p.$$

Also auch $\sup\left\{\left|\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| : \|g\|_q \leq 1\right\} \leq \|f\|_p$.

Beweis von $\geq$ im Fall $1 < p,q < \infty$:

Analog zu T3.3, sei die Funktion $h : [a,b] \mapsto \mathbb{K}$ gegeben durch

$$h(x) := \begin{cases} 0 & , \quad \text{für } x \in [a,b] \text{ mit } f(x) = 0 \\ |f(x)|^{p-2}\overline{f(x)} & , \quad \text{sonst} \end{cases}.$$

Dann ist $h \in C([a,b],\mathbb{K})$, denn $|h| = |f|^{p-1}$ $(p > 1)$ und $h(x_0) = 0$ für alle Nullstellen x_0 von f. Wir können die Stetigkeit wie folgt erkennen:
Sei $x_0 \in [a,b]$ eine beliebige Nullstelle von f, also auch $h(x_0) = 0$, und sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Da f und $|\cdot|^{p-1}$ stetig sind, ist, ist auch $|f|^{p-1}$ stetig und somit gibt es ein $\delta > 0$, sodass $|f(x)|^{p-1} < \varepsilon\ \forall\ x \in [a,b]$ mit $|x - x_0| < \delta$.

Fall 1: $f(x) = 0\ \forall\ x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. In diesem Fall ist $|h(x)| = h(x) = 0 < \varepsilon\ \forall\ x, |x - x_0| < \delta$

Fall 2: $\exists\ \tilde{x} \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ mit $f(\tilde{x}) \neq 0$. Dann ist $|h(\tilde{x}) = |f(x)|^{p-1} < \varepsilon$, da $|\tilde{x} - x_0| < \delta$.

Außerdem gilt $|h|^q = |f|^{(p-1)q} = |f|^p$ und somit $\|h\|_q = \left(\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^q = \|f\|^{\frac{p}{q}}$. Setzen wir $\tilde{g} := \frac{h}{\|h\|_q}$, so folgt

$$\int_a^b f(x)\tilde{g}(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\|h\|_q}\int_a^b |f(x)|^p\,\mathrm{d}x = \frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^{\frac{p}{q}}} = \|f\|_p^{p-\frac{p}{q}} = \|f\|_p$$

Somit wird das Supremum im Fall $1 < p,q < \infty$ in $\tilde{g}$ angenommen und stimmt mit $\|f\|_p$ überein.

Beweis von $\geq$ im Fall $p = 1, q = \infty$:

Am liebsten würden wir $x \mapsto \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|}$ als Testfunktion für g in $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ einsetzten um $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1$ zu erhalten, doch da das Supremum über stetige Funktionen gebildet wird, ist dies nicht erlaubt. Wir benutzen daher folgende Regularisierung:
Für $\varepsilon > 0$, def $g_\varepsilon(x) := \frac{\overline{f(x)}}{|f(x)|+\varepsilon}$. Dann gilt $g_\varepsilon \in C([a,b],\mathbb{K})$, sowie $\|g_\varepsilon\|_\infty \leq 1$. Außerdem gilt $\forall\ x \in \mathbb{K}$

$$|f(x)g_\varepsilon(x) - f(x) = \left|\frac{|f(x)|^2}{|f(x)|+\varepsilon} - |f(x)|\right| = \left|\frac{|f(x)|^2 - |f(x)|^2 - \varepsilon|f(x)|}{|f(x)|+\varepsilon}\right| = \varepsilon\frac{|f(x)|}{|f(x)|+\varepsilon} \leq \varepsilon.$$

Folglich konvergiert fg_ε gleichmäßig gegen $|f|$, weshalb wir Integral und Grenzwert vertauschen dürfen. Damit erhalten wir

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int\limits_a^b f(x)g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b \lim_{\varepsilon\to 0} f(x)g_\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Es gibt also eine Folge $(g_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ in der Menge $M := \{g \in C([a,b],\mathbb{K}) | \|g\|_\infty \leq 1\}$, sodass $\int_a^b fg_\varepsilon \overset{\varepsilon\to 0}{\to} \|f\|_1$, also $\sup\limits_{g\in M}\left|\int_a^b fg\right| \geq \|f\|_1$.

<u>Beweis von $\geq$ im Fall $p=\infty, q=1$:</u>

Wegen $|f| \in C([a,b],\mathbb{K})$ und da $[a,b]$ kompakt ist, gibt es ein $x_0 \in [a,b]$ mit

$$|f(x_0)| = \max_{x\in[a,b]} |f(x)| = \|f\|_\infty.$$

Es genügt somit eine Folge $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C([a,b],\mathbb{K})$ zu finden, sodass $\|g_n\|_1 = 1$

$$\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \overset{n\to\infty}{\to} f(x_0).$$

Wir erreichen dies zum Beispiel mit $g_n(x) := n\gamma(n(x-x_0))$, wobei

$$\gamma(x) = \begin{cases} 1-|x| & , \ |x| \leq 1 \\ 0 & , \ |x| > 1 \end{cases},$$

mit

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \gamma(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{1} 1-|x|\,\mathrm{d}x = 2\int\limits_0^1 1-x\,\mathrm{d}x = 1.$$

Da wir uns hier auf $[a,b]$ beschränken, müssen wir dafür sorgen, dass $\int\limits_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$ gilt, selbst wenn x_0 nahe bei a oder b liegt. Wir unterscheiden daher folgende Fälle:

<u>Fall 1: $x_0 \neq a$ und $x_0 \neq b$:</u>

Wir wählen $n_0 \in \mathbb{N}$ so, dass $g_{n_0}(a) = g_{n_0}(b) = 0$, und damit auch $g_{n_0}(x) = 0 \ \forall \ x \in \mathbb{R}\backslash(a,b)$. Wir können g_n also auf $[a,b]$ beschränken, d.h. wir definieren $\forall \ n \geq n_0 : h_n := g_n|_{[a,b]}$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$

$$||h_n||_1 = \int\limits_a^b h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

sowie unter Verwendung des Mittelwertsatzes der Integralrechnung (Satz 5.10 Analysis I)

$$\int\limits_a^b f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} f(x)(1-n|x-x_0|)\,\mathrm{d}x = f(\zeta_n)\int\limits_{x_0-\frac{1}{n}}^{x_0+\frac{1}{n}} g_n(x)\,\mathrm{d}x = f(\zeta_n)$$

für ein $\zeta_n \in [x_0-\frac{1}{n}, x_0+\frac{1}{n}]$. Aus der Stetigkeit von f und $|\cdot|$ folgt wegen $\zeta_n \to x_0$ für $n\to\infty$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\int\limits_a^b f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\lim_{n\to\infty}\int\limits_a^b f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x\right| = |f(x_0)|.$$

Also approximiert die Folge $(h_n)_{n\geq n_0} \subset M := \{g \in V([a,b],\mathbb{K}) : \|g\|_1 \leq 1\}$ durch $\left|\int\limits_a^b h_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ den Wert $\|f\|_\infty$, d.h. $\sup\limits_{g\in M}\left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq \|f\|_\infty$.

Fall 2: $x_0 = a$ oder $x_0 = b$:
Wir wandeln γ und damit g_n ein wenig ab: Definiere $\tilde{\gamma}$ auf $\mathbb{R}$ durch

$$\tilde{\gamma}(x) := \begin{cases} 1 - \frac{1}{2}(x-a) & , \quad \text{falls } x_0 = a, |x-a| \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{2}(b-x) & , \quad \text{falls } x_0 = b, |x-b| \leq 2 \\ 0 & , \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Analog zu oben, $\tilde{g}_n(x) := n\tilde{\gamma}(nx)$ und wähle $n_1 \in \mathbb{N}$ so, dass

$$\tilde{g}_{n_1}(b) = 0, \text{falls } x_0 = a \text{ bzw. } \tilde{g}_{n_1}(a) = 0, \text{falls } x_0 = b$$

gilt. Wir beschränken uns wieder auf $[a,b]$: $\forall\ n \geq n_1$ seien $\tilde{h}_n := \tilde{g}_n|_{[a,b]}$. Dann gilt für alle $n \geq n_1$: $\tilde{h}_n \in C([a,b],\mathbb{K})$, sowie $\|\tilde{h}\|_1 = \int\limits_a^b \tilde{h}_n(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \tilde{\gamma}(x)\,\mathrm{d}x = 1$. Außerdem gibt es (wieder nach Mittelwertsatz der Integralrechnung) eine Folge (ζ_n) bzw (ξ_n) mit $\zeta_n \in [a, a+\frac{2}{n}]$ und $\xi_n \in [b-\frac{2}{n}, b]$ sodass

$$\int\limits_a^b f(x)\tilde{h}_n(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} n \int\limits_a^{a+\frac{2}{n}} f(x)(1-\frac{1}{2}(x-a))\,\mathrm{d}x = f(\zeta_n) \int\limits_a^{a+\frac{2}{n}} \tilde{h_n}(x)\,\mathrm{d}x = f(\zeta_n) \\ n \int\limits_{b-\frac{2}{n}}^{b} f(x)(1-\frac{1}{2}(b-x))\,\mathrm{d}x = f(\xi_n) \int\limits_{b-\frac{2}{n}}^{b} \tilde{h_n}(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi_n) \end{cases}$$

gilt. Aus der Stetigkeit von f und $|\cdot|$ folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int\limits_a^b f(x)h_n(x)\,\mathrm{d}x \right| = |f(x_0)| = \|f\|_\infty.$$

Also approximiert die Folge $(\tilde{h}_n)_{n\geq n_1} \subset M := \{g \in V([a,b],\mathbb{K}) : \|g\|_1 \leq 1\}$ durch $\left|\int\limits_a^b h_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x\right|$ den Wert $\|f\|_\infty$, d.h. $\sup\limits_{g\in M} \left|\int\limits_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \geq \|f\|_\infty$.

Aufgabe 2

Mit Aufgabe H3.1 können wir diese Aufgabe sehr leicht lösen. Sei p konjugiert zu q, d.h. $p,q > 0$ und $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und $B := \{h \in C([a,b],\mathbb{K}) | \|h\|_q \leq 1\}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \|f+g\|_p &= \sup\left\{ \left| \int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,h(x)\,\mathrm{d}x \right| \middle| h \in B \right\} \\ &= \sup\left\{ \left| \int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x \right| \middle| h \in B \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \left| \int\limits_a^b f(x)h(x)\,\mathrm{d}x \right| + \left| \int\limits_a^b g(x)h(x)\,\mathrm{d}x \right| \middle| h \in B \right\} \\ &\leq \sup\left\{ \int\limits_a^b |f(x)h(x)|\,\mathrm{d}x \middle| h \in B \right\} + \sup\left\{ \int\limits_a^b |g(x)h(x)|\,\mathrm{d}x \middle| h \in B \right\} \\ &= \|f\|_p + \|g\|_p. \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Man sieht leicht, dass für $i = 1,2$ und für alle $x, y \in M, d_i(x,y) \geq 0,\ d_i(x,y) = d_i(y,x)$ sowie $d(x,x) = 0$ gilt. Bleibt also die Dreiecksungleichung zu zeigen. Wir beginnen mit d_1. Sei $f(x) = \frac{x}{a+x}$. Dann ist f fallend für alle $x \geq 0$, d.h. $\forall\ 0 \leq x \leq y, f(x) \leq f(y)$. Weiter gilt

$$f(x+y) = \frac{x}{a+x+y} + \frac{y}{+a+x+y} \leq \frac{x}{a+x} + \frac{y}{a+y} = f(x) + f(y).$$

Diese Eigenschaft zusammen mit der Dreiecksungleichung von d gibt uns für alle $x, y, z \in M$

$$f(d(x,z)) \leq f(d(x,y) + d(y,z)) \leq f(d(x,y)) + f(d,(y,z))$$

die Dreiecksungleichung von d_1 und damit ist d_1 eine Halbmetrik. Nun zeigen wir dies auch für d_2. Für alle $x, y, z \in M$ gilt

$$\begin{aligned} d_2(x,y) = \min\{a, d(x,y)\} &\leq \min\{a, d(x,z) + d(z,y)\} \\ &\leq \min\{a, d(x,z)\} + \min\{a, d(z,y)\} \\ &= d(x,z) + d(z,y). \end{aligned}$$

Damit ist auch d_2 eine Halbnorm. Seien $\mathcal{T}_d, \mathcal{T}_{d_1}$ und $\mathcal{T}_{d_2}$ die Topologien auf M bezüglich den Halbnormen d, d_1 und d_2. Wir zeigen, dass diese drei Topologien identisch sind.
Eine kurze Beweisskizze:
Eine Topologie $\mathcal{T}$ die durch eine Metrik d erzeugt wird, hat folgende Eigenschaft:

$$U \in \mathcal{T} \Leftrightarrow\ \forall\ x \in U\ \exists\ \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^d(x) \subseteq U.$$

Um zu zeigen, dass $U \in \mathcal{T}$ auch offen bezüglich einer zweiten Topologie $\mathcal{T}'$, erzeugt durch die Metrik d', ist, zeigen wir also

$$\forall\ x \in U\ \exists\ \varepsilon, \delta > 0 : U_\delta^{d'}(x) \subseteq U_\varepsilon^d(x) \subseteq U.$$

Wir beginnen mit $\mathcal{T}_{d_i} \subseteq \mathcal{T}_d$ für $i = 1,2$. Sei $U \in \mathcal{T}_{d_i}$ eine offene Menge. Sei weiter $x \in U$, dann existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass $U_\varepsilon^{d_i}(x) \subseteq U$. Wir beobachten, dass für alle $x, y \in M$, $d_1(x,y) \leq \frac{d(x,y)}{a}$ und $d_2(x,y) \leq d(x,y)$. Setze $a_1 = a$ und $a_2 = 1$. Dann ist

$$U_{a_i\varepsilon}^d(x) = \{y \in M : d(x,y) < a_i\varepsilon\} \subseteq \{y \in M : d_i(x,y) < \varepsilon\} = U_\varepsilon^{d_i}.$$

Somit haben wir für alle $x \in U$ ein $\delta_i = a_i\varepsilon$ gefunden, sodass $U_{\delta_i}^d(x) \subseteq U$. Damit ist U offen bzgl. d, d.h. $U \in \mathcal{T}_d$, also $\mathcal{T}_{d_i} \subseteq \mathcal{T}_d$.
Wir zeigen nun die andere Richtung $\mathcal{T}_d \subseteq \mathcal{T}_{d_i}$ für $i = 1,2$. Sei wieder $x \in U \in \mathcal{T}_d$ und $\varepsilon > 0$ sodass $U_\varepsilon^d(x) \subseteq U$. Wir können ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen, dass $\varepsilon < a$. Ist $d(x,y) < a$ so ist klar, dass $d(x,y) = d_2(x,y)$ und außerdem $\frac{2}{1+\frac{d(x,y)}{a}} \geq 1$. Damit erhalten wir

$$d(x,y) \leq \frac{2d(x,y)}{1 + \frac{d(x,y)}{a}} = \frac{2d(x,y)}{a + d(x,y)} = 2ad_1(x,y)$$

und somit

$$U_{\frac{\varepsilon}{2a}}^{d_1} \subseteq U_\varepsilon^d(x), \qquad U_\varepsilon^d(x) = U_\varepsilon^{d_2}(x).$$

Mit der analogen Schlussfolgerung wie im 1. Teil erhalten wir also $\mathcal{T}_{d_i} \subseteq \mathcal{T}_d$.
Wir haben damit $\mathcal{T}_{d_i} = \mathcal{T}_d$ für $i = 1,2$ gezeigt.

Aufgabe 4

Wegen $|H(x)| \geq 0$ für alle $H \in \mathcal{B}$ und $x \in V$ folgt Nichtnegativität. Weiter folgt aus der Homogenität von $H, |\cdot|$ und sup für alle $\lambda \in \mathbb{K}$ und $x \in V$: $|\lambda x| = \sup\{|H(\lambda x)||H \in$

$\mathcal{B}\} = |\lambda| \sup\{|H(x)||\|H \in \mathcal{B}|\lambda|\|x\|$ die Linearität von $\|\cdot\|$. Bleibt die Dreiecksungleichung. Sei $x, y \in V$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\|x+y\| &= \sup\{|H(x+y)|H \in \mathcal{B}\} \\
&\leq \sup\{|H(x)| + |H(y)| \ |H \in B\} \\
&\leq \sup\{|H(x)| \ |H \in \mathcal{B}\} + \sup\{|H(y)| \ |H \in \mathcal{B}\} \\
&= \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$