Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

1. Wir zeigen zuerst, dass $\langle\cdot,\cdot\rangle$ wohldefiniert ist. Das bedeutet in diesem Fall, dass für alle $x, y \in V$ gilt $|\langle x, y\rangle| < \infty$. Da sich jedes Polynom als Linearkombination von Monomen schreiben lässt, zeigen wir Wohldefiniertheit nur für Monome, der allgemeine Fall folgt dann mit der sesquilinearität von $\langle\cdot,\cdot\rangle$ die wir im Anschluss zeigen. Seien also Monome x, y beliebig gegeben. Wir bezeichnen den Grad von x, y mit $n \in \mathbb{N}$ beziehungsweise $m \in \mathbb{N}$. Aus der Abschätzunge
$$\forall u \in \mathbb{R} \forall n \in \mathbb{N} : e^u > \frac{u^n}{n!},$$
welche wir im letzten Semester gefunden haben ergibt sich
$$\begin{aligned}|\langle x, y\rangle| &= \left|\int_0^\infty \overline{x(t)}y(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right| = \left|\int_0^\infty \overline{x(1)t^n}y(1)t^m e^{-t}\mathrm{d}t\right| = |\overline{x(1)}y(1)| \int_0^\infty t^{n+m}e^{-t}\mathrm{d}t\\ &= |\overline{x(1)}y(1)| \int_0^\infty \frac{t^{n+m}}{e^{t/2}}e^{-t/2}\mathrm{d}t \leq= |\overline{x(1)}y(1)| \int_0^\infty \frac{t^{n+m}}{\frac{(t/2)^{n+m}}{(n+m)!}}e^{-t/2}\mathrm{d}t\\ &= |\overline{x(1)}y(1)| \int_0^\infty 2^{n+m}(n+m)!e^{-t/2}\mathrm{d}t = |\overline{x(1)}y(1)|2^{n+m}(n+m)! \left.\frac{-1}{2}e^{-t/2}\right|_{t=0}^\infty\\ &= |\overline{x(1)}y(1)|2^{n+m-1}(n+m)! < \infty.\end{aligned}$$

2. Nun erinnern wir uns an die Definition einer hermitischen Sesquilinearform (Def 1.13 im Skript) und zeigen nacheinander deren Unterpunkte. Seien $x, y, z \in V$ und $\lambda \in \mathbb{C}$ beliebig gegeben.

   a): Antilinearität im ersten Argument: Es gilt
$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle = \int_0^\infty \overline{x(t)+y(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \overline{x(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \overline{y(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t\\ = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle,\end{aligned}$$
$$\langle \lambda x, z\rangle = \int_0^\infty \overline{\lambda x(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \overline{\lambda}\int_0^\infty \overline{x(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \overline{\lambda}\langle x, z\rangle.$$

   b): Linearität im zweiten Argument: Es gilt
$$\begin{aligned}\langle x+y, z\rangle = \int_0^\infty \overline{x(t)}(y(t)+z(t))e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \overline{x(t)}y(t)e^{-t}\mathrm{d}t + \int_0^\infty \overline{x(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t\\ = \langle x, y\rangle + \langle x, z\rangle,\end{aligned}$$
$$\langle \lambda x, z\rangle = \int_0^\infty \overline{x(t)}\lambda z(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda\int_0^\infty \overline{x(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \lambda\langle x, z\rangle.$$

   c): Hermitizität:
$$\langle x, z\rangle = \int_0^\infty \overline{x(t)}z(t)e^{-t}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \overline{\overline{z(t)}x(t)}e^{-t}\mathrm{d}t = \overline{\int_0^\infty \overline{z(t)}x(t)e^{-t}\mathrm{d}t} = \overline{\langle z, x\rangle}.$$

3. Zu einem Prähilbertraum gehört noch, dass $\langle \cdot, \cdot \rangle$ positiv definit ist. Sei $0 \neq x \in V$ beliebig gegeben. Weil x nicht das Nullpolynom ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ und ein $t' \in \mathbb{R}^+$ sodass

$$|x(t')|^2 > 2\varepsilon \tag{1}$$

gilt. Es gilt außerdem, dass x ein Polynom und damit stetig ist, daher existiert ein $\delta > 0$ sodass

$$\forall t \in [t', t' + \delta] : x(t') > \varepsilon. \tag{2}$$

Somit kann man $\langle x, x \rangle$ unter Verwendung der Monotonie des Integrals und der Exponentialfunktion wie folgt abschätzen

$$\langle x, x \rangle = \int_0^\infty \overline{x(t)} x(t) e^{-t} \mathrm{d}t = \int_0^\infty |x|^2(t) e^{-t} \mathrm{d}t \tag{3}$$

$$> \int_{t'}^{t'+\delta} \varepsilon e^{-t} \mathrm{d}t = \varepsilon \left[-e^{-t} \right]_{t=t'}^{t=t'+\delta} = \varepsilon \left(e^{-t'} - e^{-t'-\delta} \right) > 0. \tag{4}$$

Aufgabe 2

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum und $K \subseteq V$ eine konvexe Menge, welche um die $0 \in V$ symmetrisch liegt. Weiter sei $\| \cdot \|$ definiert wie in der Aufgabenstellung.

a) Wir überprüfen die Eigenschaften einer Halbnorm nacheinander.

1) Positivität: Dies gilt direkt nach Definition, denn für $x \in V$ gilt

$$\|x\| = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \middle| \lambda > 0, \lambda x \in K \right\} \geq 0. \tag{5}$$

2) Homogenität: Sei $x \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ dann gilt mit Hilfe der Symmetrie

$$\|\alpha x\| = \| - \alpha x\| = \||\alpha| x\| = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \middle| \lambda > 0, \lambda |\alpha| x \in K \right\} \tag{6}$$

$$= \inf \left\{ \frac{|\alpha|}{\beta} \middle| \beta > 0, \beta x \in K \right\} = |\alpha| \|x\|. \tag{7}$$

3) Dreiecksungleichung: Seien $x, y \in V$ gegeben. Wir nehmen ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, dass $x \neq 0 \neq y$ gelten. Im Folgenden kürzen wir $\frac{1}{\|x\|} = \alpha$, $\frac{1}{\|y\|} = \beta$, $\frac{1}{\|x+y\|} = \lambda$ ab. Aufgrund der Konvexität von K ist für jedes $t \in [0, 1]$

$$t \alpha x + (1 - t) \beta y$$

ein Element von $\overline{K}$. Wir wählen $t^* = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$ aus und erhalten

$$t^* \alpha x + (1 - t^*) \beta y = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} x + \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} y = \frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} (x + y) \in \overline{K}. \tag{8}$$

Nun gilt

$$\frac{\alpha \beta}{\alpha + \beta} (x + y) \in \overline{K} \tag{9}$$

und aufgrund der Infimumseigenschaft und Definition von λ folgt daraus

$$\|x + y\| = \frac{1}{\lambda} \leq \frac{\alpha + \beta}{\alpha \beta} = \|x\| + \|y\|. \tag{10}$$

$\square$

b) Wir zeigen zuerst die linke Ungleichung. Sei $x \in V$ mit $0 < \|x\| < 1$ gegeben. Dann gilt

$$\forall 0 < t < \frac{1}{\|x\|} : tx \in K, \tag{11}$$

nach der in a) angesprochenen Infimumseigenschaft. Wir wählen $t' = 1 < \frac{1}{\|x\|}$, damit folgt $1 \cdot x \in K$.

Nun zur zweiten Ungleichung. Wir beweisen diese Ungleichung durch Widerspruch. Sei $x \in K$ mit $\|x\| > 1$ gegeben. Dann gilt

$$1 < \|x\| = \inf \left\{ \frac{1}{\lambda} \mid \lambda > 0, \lambda x \in K \right\}, \tag{12}$$

daraus folgt

$$\forall \lambda \in \{\alpha > 0 \mid \alpha x \in K\} : \frac{1}{\lambda} \geq \|x\| > 1. \tag{13}$$

Das steht im Widerspruch dazu, dass $1 \cdot x \in K$ und damit $1 \in \{\alpha > 0 \mid \alpha x \in K\}$ gelten muss. $\square$

Aufgabe 3

Sei $f \in \mathbb{C}^n$ mit $n \in \mathbb{N}$. Falls $f = 0$ ist, die die Aussage klar. Nehme also $f \neq 0$ ist, dann wähle $k \in \{0, \dots, n\}$, sodass der $|f_k| = \|f\|_\infty$ 0 erfüllt ist. Sei $p \in \mathbb{N}$, dann gilt einerseits

$$\frac{\|f\|_p}{\|f\|_\infty} = \sqrt[p]{\sum_{l=0}^{n} \left| \frac{f_l}{\|f\|_\infty} \right|^p} \geq \sqrt[p]{\left| \frac{f_k}{\|f\|_\infty} \right|^p} = 1 \tag{14}$$

und andererseits

$$\frac{\|f\|_p}{\|f\|_\infty} = \sqrt[p]{\sum_{l=0}^{n} \left| \frac{f_l}{\|f\|_\infty} \right|^p} \leq \sqrt[p]{\sum_{l=0}^{n} \left| \frac{f_k}{\|f\|_\infty} \right|^p} = \sqrt[p]{n} \tag{15}$$

. Damit gilt also $1 \leq \frac{\|f\|_p}{\|f\|_\infty} \leq \sqrt[p]{n}$ und aus Analysis 1 wissen wir, dass $\sqrt[p]{n} \xrightarrow{p \to \infty} 1$ gilt. Anwenden des Grenzwertes auf die Doppelte Ungleichung ergibt

$$\begin{aligned} 1 \leq \lim_{p \to \infty} \frac{\|f\|_p}{\|f\|_\infty} \leq 1 \\ \iff \|f\|_\infty = \lim_{p \to \infty} \|f\|_p. \end{aligned}$$

$\square$

Aufgabe 4

a) Wir zeigen zuerst "$B \subseteq \bigcap_{y \in B^*} H_y$". Sei dafür $x \in B$ und $y \in B^*$ gegeben. Es gilt nun nach der Definition von B^*: $x \in H_y$. Weil y und x beliebig gewählt haben folgt daras die Behauptung.

Nun der gegenteilige Fall "$B \supseteq \bigcap_{y \in B^*} H_y$". Sei $x \in \bigcap_{y \in B^*} H_y$ gegeben. Wir nehmen ohne Beschänkung der Allgemeinheit an, dass $x_1 \geq 0$ und $x_2 \geq 0$ gelten (andernfalls vertausche $x_{1,2}$ mit $-x_{1,2}$ im gesamten Argument). Falls $x_2 = 0$ gilt, wählen wir $(1, 0) = y \in B^*$ womit

$$\langle y, x \rangle = x_1 < 1 \tag{16}$$

und damit $x \in B$ gilt.

Wir gehen jetzt also davon aus, dass auch $x_2 > 0$ erfüllt ist. Wir wählen $z \in \partial B \cap \{\lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}^+\}$, das ist möglich, weil diese Halbgerade in der $0 \in B$ beginnt und ∂B das innere von B von B^c trennt. Nun legen wir die Tangente an ∂B durch z mit Hilfe der in der Lösung von T2.4 lässt sich das darstellen als

$$\begin{aligned} T_z &:= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b = -\frac{z_1^2}{(1-|z_1|^3)^{\frac{2}{3}}}(a - z_1) + \sqrt[3]{1-|z_1|^3}\right\} && (17)\\ &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b + \frac{z_1^2}{(1-|z_1|^3)^{\frac{2}{3}}} a < \sqrt[3]{1-|z_1|^3} + \frac{z_1^3}{(1-|z_1|^3)^{\frac{2}{3}}}\right\} && (18)\\ &= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid b(1-|z_1|^3)^{\frac{2}{3}} + z_1^2 a = 1\right\} && (19)\\ &:= \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2^* b + z_1^* a = 1\right\}, && (20)\end{aligned}$$

wobei die letzte Zeile die Definition von z^* ist. Der Nenner ist jeweils unproblematisch, weil aus der Definition von ∂B folgt

$$|z_1|^3 + |z_2|^3 = 1 \wedge z_1 = 1 \iff z_2 = 0 \tag{21}$$

und Ursprungssgeraden durch x nur dann ∂B im Punkt $(1,0)$ schneiden wenn $x_2 = 0$ gilt und das haben wir ausgeschlossen. Wir finden ein $y \in B^*$, welches durch T_z beschränkt wird, nämlich

$$H_{z^*} := \left\{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid z_2^* b + z_1^* a < 1\right\}, \tag{22}$$

dieses enthält B nach Konstruktion (wird begrenzt durch eine Tangente an dessen Rand) und einsetzen von $a = x_1, z_1 = tx_1, b = x_2, z_2 = tx_2$ in die Bedingung von H_{z^*} ergibt

$$x_2(1 - t^2 x_1^2)^{\frac{2}{3}} + t^2 x_1^3 < 1. \tag{23}$$

Der Faktor t kann bestimmt werden, indem die Gleichung $\|tx\|_3 = 1$ nach t auflöst. Das ergibt $t = (x_1^3 + x_2^3)^{\frac{-1}{3}}$, einsetzen in (23) liefert

$$\sqrt[3]{x_1^3 + x_2^3} < 1. \tag{24}$$

Der Punkt x ist also nur in H_{z^*} wenn er auch in B ist. $\square$

b) Wir zeigen zuerst $B^* \supseteq \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |y_1|^{\frac{3}{2}} + |y_2|^{\frac{3}{2}} \leq 1\right\} := C$. Sei dafür dafür $y = (y_1, y_2) \in C$ es ist zu zeigen, dass es in B^* liegt. Wähle also ein $x \in B$ beliebig aus und berechne mit Hilfe der Hölderungleichung für $p = \frac{3}{2}, q = 3$

$$\langle y, x\rangle \leq \|y\|_{\frac{3}{2}} \|x\|_3 < 1, \tag{25}$$

also ist $x \in H_y$ und daher $B \subseteq H_y$ und daher $y \in B^*$.

Nun zum Fall $B^* \subseteq \left\{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |y_1|^{\frac{3}{2}} + |y_2|^{\frac{3}{2}} \leq 1\right\} = C$. Sei dafür $(y_1, y_2) = y \in B^*$ gegeben. Da $0 \in C$ gilt nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit an, $y \neq 0$. Wir wählen

$$x = (\operatorname{sgn}(y_1)\sqrt{|y_1|}, \operatorname{sgn}(y_2)\sqrt{|y_2|}). \tag{26}$$

Dabei ist sgn für die Vorzeichenfunktion:

$$\begin{aligned} \operatorname{sgn} : \mathbb{R} &\to \{-1, 0, 1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{falls } x = 0 \\ -1 & \text{falls } x < 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Dann gilt $\frac{x}{\|x\|_3} \in B$, also

$$1 > \left\langle y, \frac{x}{\|x\|_3}\right\rangle = \frac{|y_1|^{\frac{3}{2}}}{\|x\|_3} + \frac{|y_1|^{\frac{3}{2}}}{\|x\|_3} = \frac{|y_1|^{\frac{3}{2}} + |y_2|^{\frac{3}{2}}}{\sqrt[3]{|y_1|^{\frac{3}{2}} + |y_2|^{\frac{3}{2}}}} = \left(|y_1|^{\frac{3}{2}} + |y_2|^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{27}$$

und damit ist $y \in C$. $\square$

c) Siehe Skizze I^*

d) Siehe Skizze I^*

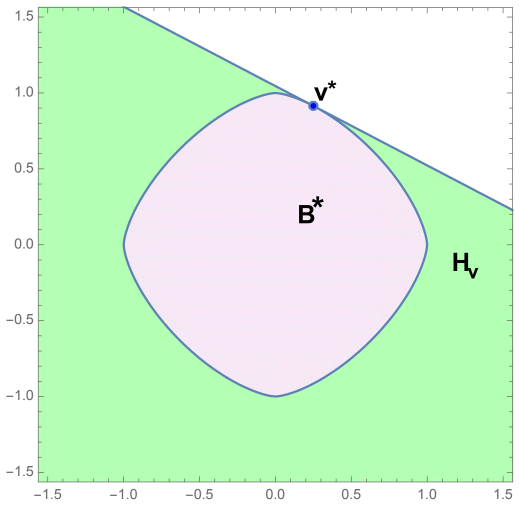

Abbildung 1: Skizze I^*