Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

a) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}, f : U \to \mathbb{R}$ mit $\mathrm{d}f = 0$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Sei $x \in U$ gegeben. Wir wählen $V = B_\varepsilon(x)$ mit $\varepsilon > 0$ so klein, dass $V \subseteq U$ gilt. Da V sternförmig ist können wir Lemma 2.121 verwenden. Sei $\mathrm{d}f = \sum_{l=1}^n \alpha_l \mathrm{d}x_l$. Eine Stammfunktion von $\mathrm{d}f$ ist dann gegeben durch, $y \in V$

$$F(y) = \int_0^1 \sum_{l=1}^n \alpha_l(ty + (1-t)x)(y_l - x_l)\mathrm{d}t, \tag{1}$$

wobei wie üblich y_l, x_l die l-ten Komponenten von y bzw. x bezeichnen. Weil f ebenfalls eine Stammfunktion von $\mathrm{d}f$ ist, gilt dass deren Differenz konstant ist. Nun gilt aber $\mathrm{d}f = 0$, also auch $\forall l : \alpha_l = 0$ und damit

$$\forall y \in V : F(y) = \int_0^1 \sum_{l=1}^n 0 \cdot (y_l - x_l)\mathrm{d}t = 0. \tag{2}$$

Damit ist F konstant auf V, also auch f.

b) Wir stellen zunächst fest, dass falls f konstant in zwei Mengen $V, V' \subseteq U$ ist und $V \cap V' \neq \emptyset$ gilt, so muss $\forall x \in V \forall x' \in V' : f(x) = f(x')$ gelten. Die Abbildung f ist dann also konstant auf $V \cup V'$. Sei nun U zusammenhängend, dann wählen wir eine Überdeckung $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von U mit $V_n \cap V_{n+1} \neq \emptyset$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die V_n werden außerdem aus Bällen von Radius r_n um Mittelpunkte x_n gewählt. Der Beweis von Aufgabe a) zeigt, dass f konstant auf sternförmigen Gebieten ist, also ist f konstant eingeschränkt auf jedes V_n. Aus diesen beiden Gründen ist f konstant auf $\bigcup_{n=1}^N V_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch auf $\bigcup_{n=1}^\infty V_n \supseteq U$.

c) Wir führen den Beweis durch Widerspruch. Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ derart, dass es für alle Punkte $x, y \in U$ eine stetige Kurve $k : [0,1] \to U, k(0) = x, k(1) = y$ gibt. Wir nehmen weiter an, dass U nicht zusammenhängend ist. Dann gibt es also eine eine Zerlegung

$$U = C \cup W, C \cap W = \emptyset. \tag{3}$$

Wir wählen nun $x \in C$ und $y \in W$ und definieren

$$\tau := \inf\{t \in [0,1] \mid k(t) \in W\}. \tag{4}$$

Nun gilt entweder $k(\tau) \in C$ oder $k(\tau) \in W$, wir wählen dann $\varepsilon > 0$ so klein, dass $U_\varepsilon(k(\tau)) \subseteq C$ oder $U_\varepsilon(k(\tau)) \subseteq W$ gilt. Nun gilt nach Stetigkeit von k:

$$\exists \delta > 0 : |t - \tau| < \delta \to k(t) \in U_{\varepsilon/2}(k(\tau)). \tag{5}$$

Damit muss $U_{\varepsilon/2}(k(\tau))$ nichtleeren Schnitt mit C und W haben, das ist aber nach Wahl von ε unmöglich. $\square$

Aufgabe 2

Es sei ω, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ wie in der Aufgabenstellung gegeben.

a) Wir integrieren direkt entlang einer Ursprungsgeraden durch (x, y), damit folgt

$$\omega_{k_1} = 2txtyd(tx) + t^2x^2d(ty) = 3x^2yt^2dt. \tag{6}$$

Für das Integral folgt dann

$$\int_0^1 \omega_{k_1} = \int_0^1 3x^2yt^2dt = x^2y. \tag{7}$$

b) Wir parametrisieren wieder mit Geradenstücken. Damit ergibt sich:

$$\omega_{k_{2a}} = 2tx0d(tx) + 0 = 0, \tag{8}$$

$$\omega_{k_{2b}} = 0 + x^2d(ty) = x^2ydt \tag{9}$$

und für das Integral

$$\int_{k_2} \omega = \int_{k_{2a}} 0 + \int_{k_{2b}} \omega_{k_{2b}} = \int_0^1 x^2ydt = x^2y. \tag{10}$$

c) Auch hier parametrisieren wir mit Geradenstücken. Es ergibt sich

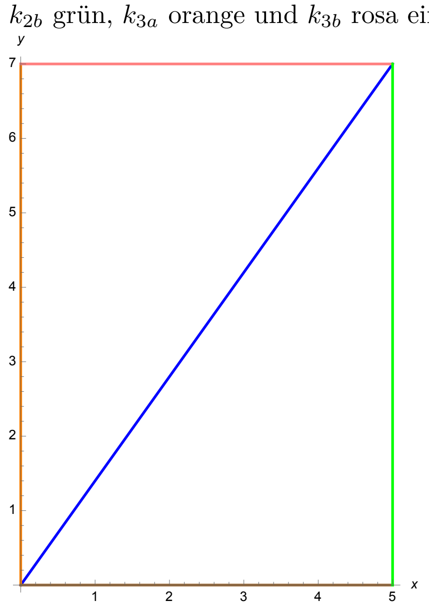
$$\omega_{k_{3a}} = 20yd0 + 0d(ty) = 0, \tag{11}$$

$$\omega_{k_{3b}} = 2xtyd(tx) + 0 = 2x^2ytdt \tag{12}$$

und für das Integral

$$\int_{k_3} \omega = \int_{k_{3a}} 0 + \int_{k_{3b}} \omega_{k_{2b}} = \int_0^1 2x^2ytdt = x^2y. \tag{13}$$

Integration über alle drei Wege hat das selbe Ergebnis. In der Skizze ist k_1 blau, k_{2a} braun, k_{2b} grün, k_{3a} orange und k_{3b} rosa eingezeichnet.



Aufgabe 3

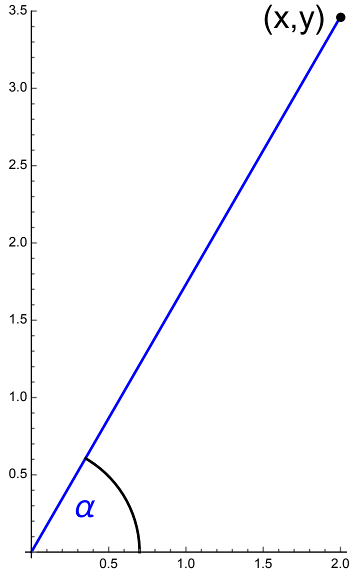
Wir überprüfen zuerst direkt durch Rechnung ob Φ_1 und Φ_2 aus der Angabe Stammfunktionen von

$$\omega = \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \tag{14}$$

sind. Es ergibt sich für geeignete Werte von x, y,

$$
\begin{aligned}
d\Phi_{1/2}(x,y) &= d\left(2\arctan\frac{y}{x \pm \sqrt{x^2+y^2}}\right) \\
&= 2\frac{1}{1+\frac{y^2}{(x\pm\sqrt{x^2+y^2})^2}}\frac{(x\pm\sqrt{x^2+y^2})dy - y(dx \pm \frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}})}{(x\pm\sqrt{x^2+y^2})^2} \\
&= 2\frac{1}{(x\pm\sqrt{x^2+y^2})^2+y^2}\left(\left(-y \mp \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dx + \left(x \pm \sqrt{x^2+y^2} \mp \frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy\right) \\
&= 2\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}(\pm x + \sqrt{x^2+y^2})}\left(\frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}\pm x)dx + \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}(\sqrt{x^2+y^2}\pm x)dy\right) \\
&= \frac{1}{x^2+y^2}(-ydx+xdy) = \omega.
\end{aligned}
$$

Geeignete Werte von x, y bedeutet hierbei, dass nicht durch 0 geteilt wird, also $x^2+y^2 \neq 0$ und entweder $x \neq \sqrt{x^2+y^2}$ oder $x \neq -\sqrt{x^2+y^2}$, dies entspricht genau dem Definitionsbereich von Φ_1 bzw. Φ_2.



Aus der Skizze und Elementargeometrie ist leicht ersichtlich, dass der Winkel zwischen der Positiven x-Achse und dem Punkt (x, y) im 1. oder 4. Quadranten gleich

$$\arctan\frac{y}{x} \tag{15}$$

ist. Für $x \neq -\sqrt{x^2+y^2}$ folgt

$$\frac{y}{x} = 2y\frac{x+\sqrt{x^2+y^2}}{2x(x+\sqrt{x^2+y^2})} = 2\frac{y(x+\sqrt{x^2+y^2})}{x^2+2x\sqrt{x^2+y^2}+y^2+x^2-y^2} = 2\frac{y\frac{1}{x+\sqrt{x^2+y^2}}}{1-\frac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}}. \tag{16}$$

Auf diese Gleichung wenden wir arctan an, dann folgt

$$\arctan\frac{y}{x} = \arctan\left(2\frac{\frac{y}{x+\sqrt{y^2+x^2}}}{1-\frac{y^2}{(x+\sqrt{x^2+y^2})^2}}\right). \tag{17}$$

Weil wir auf einen Ausdruck der Form Φ_1 kommen wollen überlegen wir uns wie man Tangens eines doppelten Argumentes darstellen kann. Es sei $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt mit

$$
\begin{aligned}
\sin(2\alpha) &= \cos\alpha\sin\alpha + \sin\alpha + \cos\alpha = 2\cos\alpha\sin\alpha \\
\cos(2\alpha) &= \cos\alpha\cos\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha
\end{aligned}
$$

die Beziehung

$$\tan(2\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = 2\frac{\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}. \tag{18}$$

In Gleichung (17) fügen wir vor den beiden Vorkommnissen von $\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} := C$ eine Identität der Form $\tan \circ \arctan$ ein und erhalten mit (18)

$$\arctan\frac{y}{x} = \arctan\left(2\frac{\tan\arctan C}{1-\tan^2\arctan C}\right) = \arctan\tan(2\arctan C) \tag{19}$$

$$= n\pi + 2\arctan C = n\pi + 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}, \tag{20}$$

wobei aufgrund der Periodizität von Tangens im Allgemeinen $n \in \mathbb{Z}$ ist. Wir können jedoch n mittels asymptotischen Verhalten finden. Für $x \in \mathbb{R}^+$ sind beide Seiden der Gleichung stetig in y und die Arkustangens Funktionen verschwinden beide bei $y = 0$. Für diesen Bereich folgt also $n = 0$. Für $y \in \mathbb{R}^+$ und $x \to 0^-$ geht die linke Seite der Gleichung gegen $-\frac{\pi}{2}$ und die Rechte gegen

$$n\pi + 2\arctan 1 = n\pi + \frac{\pi}{2}, \tag{21}$$

es folgt also in diesem Bereich $n = -1$. Für $y \in \mathbb{R}^-$ und $x \to 0^-$ geht die linke Seite der Gleichung gegen $\frac{\pi}{2}$ und die Rechte gegen

$$n\pi + 2\arctan -1 = n\pi - \frac{\pi}{2}, \tag{22}$$

es folgt also für diesen Bereich $n = 1$. Weil für festes n beide Seiten jeweils stetig in jedem Quadranten von $\mathbb{R}^2$ sind können wir zusammenfassen

$$\Phi_1(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} \text{ für } x > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi \text{ für } x \leq 0, y < 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi \text{ für } x \leq 0, y > 0 \end{cases}. \tag{23}$$

Die rechte Seite ist hierbei genau wie man den Winkel zwischen der positiven x-Achse und dem Punkt mit den Koordinaten (x,y) angeben würde.
Die analoge Aussage für Φ_2 folgt daraus, dass $\Phi_2(x,y) = \Phi_1(-x,-y)$ gilt. Damit folgt

$$\Phi_2(x,y) = 2\arctan\frac{y}{x-\sqrt{x^2+y^2}} = \begin{cases} \arctan\frac{y}{x} \text{ für } x < 0 \\ \arctan\frac{y}{x} - \pi \text{ für } x \geq 0, y > 0 \\ \arctan\frac{y}{x} + \pi \text{ für } x \geq 0, y < 0 \end{cases}. \tag{24}$$

Die gewünschte Gleichung für die Differenz von Φ_1 und Φ_2 folgt damit direkt. □

Aufgabe 4

Wir halten uns an den Hinweis und versuchen den Beweis von Satz 2.125 zu imitieren. Zunächst zur Eindeutigkeit der Darstellung in der Basis

$$\omega_1 = \frac{-ydx + (x-1)dy}{(x-1)^1 + y^2}, \quad \omega_2 = \frac{-ydx + (x+1)dy}{(x+1)^2 + y^2}. \tag{25}$$

Sei $\chi \in Z^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0),(-1,0)\}$ und nehme an es gibt zwei Darstellungen

$$\alpha_1\omega_1 + \beta_1 + df_1 = \chi = \alpha_2\omega_2 + \beta_2 + df_2, \tag{26}$$

dann folgt, dass $(\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1 + (\beta_1 - \beta_2)\omega_2$ exakt ist. Dies führt allerdings zu einem Widerspruch falls nicht $\alpha_1 = \alpha_2$ und $\beta_1 = \beta_2$ gilt. Das sieht man so ein: Wir betrachten einen Kreisweg mit einer Windung (C_1) bzw. zwei Windungen (C_2) um $(-1,0)$, dieser Weg wird parametrisiert durch

$$k_1 : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \sin t \end{pmatrix}, \tag{27}$$

beziehungsweise

$$k_1 : [0, 4\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t - 1 \\ \sin t \end{pmatrix}, \tag{28}$$

direkte Rechnung für ω_2 ergibt

$$\int_{C_1} \omega_2 = \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 t dt + \sin^2 t dt}{\cos^2 t + \sin^2 t} = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \tag{29}$$

Analog gilt $\int_{C_2} \omega_2 = 4\pi$. Die beiden Wege beginnen aber jeweils bei $(0,0)$ und enden dort. Für ω_1 verhält es sich anders, denn für $\omega_1|_{C_1}$ beziehungsweise $\omega_1|_{C_2}$ kann man auch die Einschränkung von ω_1 auf $\mathbb{R}^2 \backslash [1, \infty] \times \{0\}$ verwenden. Dieses Gebiet ist aber sternförmig, daher ist ω_1 auf diesem Gebiet exakt, also können Wegintegrale nicht vom Weg abhängen. Es muss also $\int_{C_1} \omega_1 = \int_{C_2} \omega_2$ gelten. Damit gilt

$$\int_{C_1} ((\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1 + (\beta_1 - \beta_2)\omega_2) \neq \int_{C_2} ((\alpha_1 - \alpha_2)\omega_1 + (\beta_1 - \beta_2)\omega_2), \tag{30}$$

falls $\beta_1 \neq \beta_2$ gilt. Da diese Form aber exakt ist folgt $\beta_1 = \beta_2$. Die gleiche Argumentation mit ω_1 und ω_2, sowie die beiden Pole vertauscht liefert $\alpha_1 = \alpha_2$. Damit sind $\omega 1$ und ω_2 linear unabhängig und die Darstellung eindeutig.
Nun zur Existenz der Darstellung. Sei wieder $\chi \in Z^1(\mathbb{R}^2 \backslash \{(1,0), (-1,0)\}$. Wir betrachten nun χ eingeschränkt auf die Bereiche $U_1 := \mathbb{R}^2 \backslash] - \infty, 1] \times \{0\}$, $U_2 := \mathbb{R}^2 \backslash ([-\infty, -1] \cup [1, \infty[) \times \{0\}$ und $U_3 := \mathbb{R}^2 \backslash [-1, \infty[$. Weil diese Gebiete alle Sternförmig sind (mit Zentren $(2,0)$, $(0,0)$ und $(-2,0)$) sind dort ω_1 und ω_2 jeweils exakt und haben daher Stammfunktionen. Da wir bereits Stammfunktionen auf geschlitzten Ebenen von verschobenen Versionen von $\omega_{1/2}$ kennen, können wir diese Stammfunktionen sogar direkt angeben. Sie sind (in der Notation der letzten Aufgabe)

$$\begin{aligned}
\forall (x,y) \in U_1 : \omega_1(x,y) = d\Phi_1(x-1,y), \quad \omega_2(x,y) = d\Phi_1(x+1,y) \\
\forall (x,y) \in U_2 : \omega_1(x,y) = d\Phi_2(x-1,y), \quad \omega_2(x,y) = d\Phi_2(x+1,y) \\
\forall (x,y) \in U_3 : \omega_1(x,y) = d\Phi_2(x-1,y), \quad \omega_2(x,y) = d\Phi_1(x+1,y).
\end{aligned}$$

Im folgenden werden Argumente durch $\cdot$ für eine kompaktere Notation ersetzt. Eingeschränkt auf U_1, U_2 und U_3 haben jedoch nicht nur $\omega_{1/2}$ Stammfunktionen, sondern auch χ. Wir bezeichnen diese mit g_1, g_2 und g_3. Wir machen nun einen analogen Ansatz zum Beweis von Satz 2.125 Wir suchen $\alpha_1, \alpha_3, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ sodass alle drei Funktionen

$$\begin{aligned}
f_1 &:= g_1 - \alpha_1 + \beta\Phi_1(\cdot - 1, \cdot) + \gamma\Phi_1(\cdot + 1, \cdot) \\
f_2 &:= g_2 + \beta\Phi_2(\cdot - 1, \cdot) + \gamma\Phi_2(\cdot + 1, \cdot) \\
f_3 &:= g_3 - \alpha_3 + \beta\Phi_2(\cdot - 1, \cdot) + \gamma\Phi_1(\cdot + 1, \cdot)
\end{aligned}$$

überall auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ übereinstimmen. Für jedes U_l gilt schon einmal

$$\chi|_{U_l} = \beta\omega_1 + \gamma\omega_2 + df_l \tag{31}$$

aufgrund der Definition von g_l und $d\Phi = \omega$. Um diese Gleichheit auf Ganz $\mathbb{R}^2 \backslash \{(-1,0), (1,0)\}$ heben zu können reicht es zu zeigen, dass sie überall auf $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \backslash \{0\})$ gilt. Wir sind also fertig, wenn wir die Existenz von Koeffizienten $\alpha_1, \alpha_3, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ gezeigt haben, welche diese Bedingung erfüllen. Wir schauen uns also $f_1 - f_2$ und $f_2 - f_3$ an, diese Ausdrücke sind jeweils lokal konstant. Wir definieren daher die Konstanten $c_1^+ := g_1 - g_2$, $c_2^+ := g_2 - g_3$ für Argumente oberhalb der x-Achse und $c_1^- := g_1 - g_2$, $c_2^- := g_2 - g_3$ für Argumente unterhalb der x-Achse. Wir definieren außerdem $V_+ := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+$ und $V_- := \mathbb{R} \times \mathbb{R}^-$. Aus den aus der letzten Aufgabe bekannten Relationen für Φ ergibt sich dann das folgende Gleichungssystem für den gemeinsamen Definitionsbereich $V^+ \cup V^-$

$$\begin{aligned}
0 &\overset{!}{=} f_1 - f_2 = c_1^+ 1_{V^+} + c_1^- 1_{V^-} - \alpha_1 + \beta\pi(1_{V^+} - 1_{V^-}) + \gamma\pi(1_{V^+} - 1_{V^-}) \\
0 &\overset{!}{=} f_2 - f_3 = c_2^+ 1_{V^+} + c_2^- 1_{V^-} + \alpha_3 - \gamma\pi(1_{V^+} - 1_{V^-}),
\end{aligned}$$

die Relation $f_1 - f_3$ gibt keine weitere Bedingung, da $U_1 \cap U_2 = U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_3$ gilt. Dieses Gleichungssystem wird gelöst von

$$\gamma = \frac{c_2^+ - c_2^-}{2\pi}, \quad \alpha_3 = -\frac{c_2^+ + c_2^-}{2}$$
$$\alpha_1 = \frac{c_1^+ + c_1^-}{2}, \quad \beta = \frac{c_1^- - c_1^+ + c_2^- - c_1^+}{2}.$$

$\square$