Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

(a) Wir zeigen, dass f eine positive Quadratische Form ist. Dann ist $f(0) = 0$ ein lokales Minimum. Wir zeigen also, dass A positiv definit ist. Wir berechnen dazu Unterdeterminanten.

$$\det(1) = 1, \det\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{pmatrix} = 1, \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix} = 1, \det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\1 & 2 & 2 & 2\\1 & 2 & 3 & 1\\1 & 2 & 1 & 4\end{pmatrix} = 1$$

(b)

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1, x_2, x_3, x_4)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\\&= x_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4) + x_2(x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4)\\&\quad + x_3(x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4) + x_4(x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4)\end{aligned}$$

Damit können wir die Ableitung von f berechnen.

$$\begin{aligned}df &= (2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4)dx_1 + (2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4)dx_2\\&\quad + (2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4)dx_3 + (2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4)dx_4\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist überall surjektiv bis auf den Punkt $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, 0, 0, 0)$. Da dieser Punkt jedoch nicht in M ist, ist M eine Untermannigfaltigkeit. M hat Dimension 3.

(c) M ist abgeschlossen als Urbild des Punktes $f(1, 1, 1, 1)$ unter der stetigen Abbildung f. Für die Beschränktheit betrachten wir die Gleichung für $c > 0$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1, x_2, x_3, x_4)A\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = c \cdot \|x\|_2^2 + (x_1, x_2, x_3, x_4)A'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$$

mit

$$A' = \begin{pmatrix}1-c & 1 & 1 & 1\\1 & 2-c & 2 & 2\\1 & 2 & 3-c & 1\\1 & 2 & 1 & 4-c\end{pmatrix}.$$

Ist A' positiv definit für ein $c > 0$ so ist $(x_1, x_2, x_3, x_4)A'\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ eine positive quadratische Form und damit gilt

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) \geq c \cdot \|x\|_2^2$$

also

$$\|x\|_2^2 \leq \frac{1}{c}f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{c}f(1, 1, 1, 1)$$

für alle $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$.
A' ist positiv definit, da die Determinanten der Teilmatrizen Polynome in c sind und somit stetig in c. Aus (a) wissen wir, dass die Determinanten der Teilmatrizen von $A(= A'$ für $c = 0)$ gleich 1 sind. Aus der Stetigkeit der Polynome folgt nun, dass es ein $c > 0$ gibt, für das alle Determinanten der Teilmatrizen von A' größer 0 sind.
Damit ist M beschränkt und abgeschlossen und somit kompakt.

(d) Siehe Skript Satz 2.100.

(e) Wir wenden dazu den Satz von den Lagrange-Multiplikatoren auf $g = \sum_{j=1}^{4} \beta_j x_j$ an. Wir bekommen also folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\beta_1 \lambda &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 \\
\beta_2 \lambda &= 2x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 \\
\beta_3 \lambda &= 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 + 2x_4 \\
\beta_4 \lambda &= 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 8x_4 \\
f(x_1, x_2, x_3, x_4) &= f(1, 1, 1, 1)
\end{aligned}$$

Für $\beta_1 = \frac{2}{13}, \beta_2 = \frac{7}{26}, \beta_3 = \frac{7}{26}, \beta_4 = \frac{4}{13}$ erfüllen die Punkte $(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4) = (52, 1, 1, 1, 1)$ und $(\lambda, x_1, x_2, x_3, x_4) = (-52, -1, -1, -1, -1)$ das Gleichungssystem, sowie die Bedingung $g(1, 1, 1, 1) = \sum_{i=1}^{4} \beta_i = 1$. Diese sind somit die Extrema von g auf M. Da

$$g(-1, -1, -1, -1) < g(1, 1, 1, 1) = 1$$

folgt schon, dass

$$g(1, 1, 1, 1) = \sup g[M] = 1.$$

Aufgabe 2

Wir betrachten folgendes Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
y_1 &= \frac{1}{10} \arctan(y_1 + y_2 + x_1) \\
y_2 &= \frac{1}{20} \arctan(y_1 - y_2 + x_2)
\end{aligned} \tag{$\star$}$$

Definiere $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ wie folgt

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2) = \left(\frac{1}{10} \arctan(y_1 + y_2 + x_1) - y_1, \frac{1}{20} \arctan(y_1 - y_2 + x_2) - y_2 \right).$$

Sei $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$ so, dass $F(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0$ gilt. Dann ist

$$D_2 F_{(x_1, x_2, y_1, y_2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} \frac{1}{1+(y_1+y_2+x_2)^2} - 1 & \frac{1}{10} \frac{1}{1+(y_1+y_2+x_1)^2} \\ \frac{1}{20} \frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} & -\frac{1}{20} \frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} - 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar, da

$$\begin{aligned}
\det D_2 F_{(x_1, x_2, y_1, y_2)} = 1 &- \frac{1}{10} \frac{1}{1 + (y_1 + y_2 + x_1)^2} + \frac{1}{20} \frac{1}{1 + (y_1 - y_2 + x_1)^2} \\
&- \frac{1}{100} \frac{1}{(1 + (y_1 - y_2 + x_1)^2)(1 + (y_1 - y_2 + x_1)^2)} \leq 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{100} \neq 0
\end{aligned}$$

Der Satz der impliziten Funktionen gibt uns für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ eine offene Menge U um (x_1, x_2) und eine Funktion

$$\begin{aligned}
&G^U : U \to \mathbb{R}^2 \\
&(x_1, x_2) \mapsto (g_1(x_1, x_2), g_2(x_1, x_2))
\end{aligned}$$

so, dass $F(x_1,x_2,G^U(x_1,x_2))=0$ und

$$DG^U_{(x_1,x_2)} = -D_2F^{-1}_{(x,G^U(x))}\cdot D_1F_{(x,G^U(x))} \tag{$\star\star$}$$

gilt. Wir zeigen, dass $G^U=G^V$ auf $U\cap V$ für alle V geeignet definiert und schließen dann, dass $g(x_1,x_2)=G^U(x_1,x_2)$ für alle $(x_1,x_2)\in U$ global wohldefiniert ist.
Für alle $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ sei

$$H(y_1,y_2) := \left(\frac{1}{10}\arctan(y_1+y_2+x_1), \frac{1}{20}\arctan(y_1-y_2+x_2)\right).$$

Wir zeigen, dass H eine Kontraktion auf $\mathbb{R}^2$ ist und uns daher der Banachsche Fixpunktsatz eine eindeutige Lösung für alle $(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2$ vom Gleichungssystem ($\star$) gibt.

$$DG_{(y_1,y_2)} = \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_1+y_2+x_2)^2} & \frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_1+y_2+x_1)^2} \\ \frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} & -\frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} \end{pmatrix}$$

Wir haben also mit H5.3 für alle $y=(y_1,y_2)$, dass

$$\|DH_y\|^2_{2\to 2} \le 2\left(\frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_2+y_2+x_1)^2}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2}\right)^2 \le \frac{1}{40}.$$

Somit ist für jedes $y_0=(y_1^0,y_2^0)$, $\|DH_{y_0}\|\le\frac{1}{6}$ und es existiert $\varepsilon>0$ klein genug, sodass für alle $y\in U_\varepsilon(y_0)$

$$\begin{aligned}\|H(y)-H(y_0)\| &\le \|DH_{y_0}(y-y_0)\| + O(\|y-y_0\|^2)\\ &\le \|DH_{y_0}\|_{2\to 2}\|y-y_0\| + O(\|y-y_0\|^2)\\ &\le \frac{1}{6}\|y-y_0\| + O(\|y-y_0\|^2) \le \frac{1}{2}\|y-y_0\|\end{aligned}$$

gilt. Wir zeigen nun, dass diese Abschätzung auf ganz $\mathbb{R}^2$ gilt. Sei $y_0,y\in\mathbb{R}^2$ und sei $y_0,y_1,...,y_n=y$ eine Partition auf dem Segment das y mit y_0 verbindet mit der Eigenschaft, dass für alle $i=0,...,n-1$ gilt:

$$\|H(y_i)-H(y_{i-1})\| \le \frac{1}{2}\|y_i-y_{i-1}\|.$$

Diese Partition gibt es nach obiger Rechnung. Somit ist

$$\begin{aligned}\|H(y_0)-H(y)\| &\le \|H(y_0)-H(y_1)\| + \cdots + \|H(y_{n-1}-H(y)\|\\ &\le \frac{1}{2}(\|y_0-y_1\|+\cdots+\|y_{n-1}-y\|) = \frac{1}{2}\|y-y_0\|.\end{aligned}$$

Sei $(x_1,x_2)\in U\cap V$ und seien $y=G^U(x_1,x_2)$ und $y_0=G^U(x_1,x_2)$ die Lösungen des Gleichungssystems, d.h. $H(y)=y$ und $H(y_0)=y_0$. Wegen

$$\|H(y_0)-H(y)\| = \|y-y_0\| \le \frac{1}{2}\|y-y_0\|$$

gilt schon $y=y_0$ und damit ist G wohldefiniert.
Wir berechnen nun $dg_1(0,0)$ und $dg_2(0,0)$ unter Verwendung von ($\star\star$). Sei $(y_1,y_2)=(g_1(0,0),g_2(0,0))$. Der Punkt $(0,0)$ ist der Fixpunkt der Gleichung

$$H(y_1,y_2) = \left(\frac{1}{10}\arctan(y_1+y_2+x_1), \frac{1}{20}\arctan(y_1-y_2+x_2)\right)$$

und ist durch den Banachschen Fixpunktsatz eindeutig. Daraus folgt

$$\begin{aligned}DG_{(0,0)} &= -\begin{pmatrix} \frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_1+y_2+x_2)^2}-1 & \frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_1+y_2+x_1)^2} \\ \frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} & -\frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2}-1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_1+y_2+x_2)^2} & \frac{1}{10}\frac{1}{1+(y_1+y_2+x_1)^2} \\ \frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} & -\frac{1}{20}\frac{1}{1+(y_1-y_2+x_1)^2} \end{pmatrix}\\ &= -\begin{pmatrix} \frac{9}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{21}{20}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & -\frac{1}{20}\end{pmatrix} = -\frac{1}{95}\begin{pmatrix} -11 & -11 \\ 4 & 4\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $dg_1(0,0) = \frac{11}{95}(dx_1 + dx_2)$ und $dg_2(0,0) = -\frac{4}{95}(dx_1 + dx_2)$.

Aufgabe 3

(a) Nach Korollar 2.85 ist der Tangentialraum von M in p durch $T_pM = \mathrm{Ker}(df_p)$ definiert. Wobei f eine lokale Beschreibung von M um p ist. Diese ist gegeben durch

$$f(x,y,z) = x^2 + 4xy + 2xz + 7y^2 - 2yz + 6z^2.$$

Somit haben wir

$$df = \begin{pmatrix} 2x+4y+2z \\ 4x+14y-2z \\ 2x-2y+12z \end{pmatrix}^t$$

und

$$df_{(1,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 8 \\ 16 \\ 12 \end{pmatrix}^t = 4\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}^t$$

Wir erhalten also $\mathrm{Ker}(df_p)$ durch folgende Gleichung

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad 2x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad x_1 = -2x_2 - \frac{3}{2}x_3 \end{aligned}$$

Es folgt $T_pM = \left\{ \begin{pmatrix} -2y - \frac{3}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\}$ und

$$p + T_pM = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - 2y - \frac{3}{2}z \\ 1+y \\ 1+z \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{9}{2} - 2y - \frac{3}{2}z \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| y, z \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für

$$g(x,y,z) = \frac{9}{2} - 2y - \frac{3}{2}z - x$$

ist $p + T_pM = g^{-1}(\{0\})$.

(b) Nun bekommen wir eine zweite Gleichung dazu. Es ist folglich

$$f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 + 4xy + 2xz + 7y^2 - 2yz + 6z^2 \\ 2x - y - z \end{pmatrix}$$

und damit

$$df = \begin{pmatrix} 2x+4y+2z & 4x+14y-2z & 2x-2y+12z \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

und

$$df_p = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 12 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Es ergibt sich somit $\mathrm{Ker}(df_p)$ durch folgende Gleichungen

$$\begin{aligned} 2x + 4y + 3z &= 0 \\ 2x - y - z &= 0 \end{aligned}$$

Die Lösung hiervon ist $T_pM = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ -8x \\ 10x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$ und

$$p + T_pM = \left\{ \begin{pmatrix} 1+x \\ 1-8x \\ 1+10x \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 9-8x \\ 10x-9 \end{pmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 4

(a) Da $SL_n(\mathbb{R})$ durch eine Gleichung definiert ist, hat diese Kodimension 1. Aus H 12.4 wissen wir, dass für eine Matrix B mit $\det B \neq 0$ die Ableitung der Determinante gegeben ist durch

$$d\det_B(A) = \mathrm{Spur}(B^{-1}A)\det B.$$

Dies ist ist für alle B surjektiv. Daher bildet die $SL_n(\mathbb{R})$ eine Untermannigfaltigkeit.

(b) Dieses mal haben wir eine 2-kodimensionale Untermannigfaltigkeit, da $SL_n(\mathbb{C})$ durch die beiden Gleichungen $\mathrm{Re}(\det A) = 0$ und $\mathrm{Im}(\det A) = 0$ definiert ist. Da wir $\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}^2$ interpretieren können, können wir alle $\mathbb{C}^{n\times n}$ Matrizen als $\mathbb{R}^{2(n\times n)}$ Matrizen sehen. Damit können wir wieder Aufgabe h 12.4 auf die Determinante anwenden. Diese ist wieder surjektiv.

Aufgabe 5

Wir orientieren uns hier an Beispiel 2.81 im Skript.

(a) $V = \{A \in \mathbb{C}^{n\times n} | A = A^\star\}$ ist ein n^2 dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für die Abbildung f gilt

$$f(X)^\star = (X_0 X^\star X X_0^\star)^\star = X_0 X^\star X X_0^\star = f(X)$$

also ist $f(X) \in V$. Da X_0 invertierbar ist, folgt weiter

$$U(n) = f^{-1}[\{Id\}] = f^{-1}[\{f(X_0)\}],$$

denn für $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt

$$\begin{aligned} f(X) = Id &\Leftrightarrow X_0^\star X_0 X^\star X X_0^\star X_0 = X_0^\star Id X_0 \\ &\Leftrightarrow X^\star X = Id \Leftrightarrow X \in U(n). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist f glatt. Wir berechnen die Ableitung von f in $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$

$$df_X(X') = X_0 X^\star X' X_0^\star + X_0 X'^\star X X_0^\star$$

und damit ist insbesondere für $X = X_0 \in U(n)$:

$$\begin{aligned} df_{X_0}(X') &= X_0 X_0^\star X' X_0^\star + X_0 X'^\star X_0 X_0^\star = Id X' X_0^\star + X_0 X'^\star Id \\ &= X' X_0^\star + X_0 X'^\star = X' X_0^\star + (X' X_0^\star)^\star \end{aligned}$$

Somit ist $df_{X_0} : \mathbb{C}^{n\times n} \to V$ surjektiv, denn für $Y \in V$ gilt

$$df_{X_0}(\frac{1}{2} Y X_0) = \frac{1}{2}(Y + Y^\star) = Y$$

(b) $V = \{A \in \mathbb{R}^{4\times 4} | A^t = A\}$ ist ein 10 dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Für die Abbildung f gilt

$$f(X)^t = (X_0^{-1})^t X^t G X X_0^{-1} = f(X)$$

also ist $f(X) \in V$. Da X_0 invertierbar ist, folgt weiter

$$O(1,3) = f^{-1}[\{G\}] = f^{-1}[\{f(X_0)\}],$$

denn für $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ gilt

$$\begin{aligned} f(X) = G &\Leftrightarrow X_0^t(X_0^{-1})X^t G X X_0^{-1} X_0 = X_0^t G X_0 \\ &\Leftrightarrow X^t G X = G \Leftrightarrow X \in O(1,3). \end{aligned}$$

Offensichtlich ist f glatt. Wir berechnen die Ableitung von f in $X \in \mathbb{R}^{4\times 4}$ mit Hilfe der Produktregel

$$df_X(X') = (X_0^{-1})^t X'^t G X X_0^{-1} + (X_0^{-1})^t X^t G X' X_0^{-1}$$

und damit ist insbesondere für $X = X_0 \in O(1,3)$:

$$\begin{aligned} df_{X_0}(X') &= (X_0^{-1})^t X'^t G X_0 X_0^{-1} + (X_0^{-1})^t X_0^t G X' X_0^{-1} = (X_0^{-1})^t X'^t G + G X' X_0^{-1} \\ &= G X' X_0^{-1} + (G X' X_0^{-1})^t \end{aligned}$$

Somit ist $df_{X_0} : \mathbb{R}^{4\times 4} \to V$ surjektiv, denn für $Y \in V$ gilt

$$df_{X_0}(\frac{1}{2}G^{-1} Y X_0) = \frac{1}{2}(Y + Y^t) = Y$$

Aufgabe 6

Sei $h : U \to \mathbb{R}^m$ eine in einer offenen Umgebung U_1' von $f(x)$ in U' definierte C^p-Abbildung mit Rang $dh_{f(x)} = m$, deren Nullstellengebilde $M' \cap U_1'$ ist. Nach Definition gilt dann $T_{f(x)}M' =$ Kern $dh_{f(x)}$. Sei $U_2 = U_1 \cap F^{-1}[U_1']$ mit F wie in der Angabe. Dann ist U_2 eine offene Umgebung von x in U, und $h \circ F$ ist mindestens auf U_2 definiert mit $h \circ F|_{M\cap U_2} = 0$. Nun sei $\phi : W \to M \cap U_2$ (W geeignete offene Umgebung von 0 in $\mathbb{R}^{\dim M}$) eine C^p-Parametrisierung von M nahe bei x mit $\phi(0) = x$. Dann gilt einerseits $T_xM = \text{Bild}(d\phi_0)$ und andererseits $h \circ F \circ \phi = 0$. Mit der Kettenregel folgt $dh_{f(x)} \circ dF_x \circ d\phi_0 = 0$, also $dF_x[T_xM] = dF_x[\text{Bild}(d\phi_0)] \subseteq \text{Kern}[dh_{f(x)}] = T_{f(x)}M'$, wie zu zeigen war.