Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

a) Hierfür ist nichts abzugeben.

b) Wir sollen die Cholesky-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 8 & -4 & 4 \\ 1 & -4 & 3 & -3 \\ -1 & 4 & -3 & 4 \end{pmatrix} \tag{1}$$

berechnen und anhand dessen Entscheiden ob A positiv definit ist. Wir stellen fest, dass $A_{1,1} = 1 > 0$ gilt und daher können wir mit der Zerlegung fortfahren. Diese sagt uns, dass A positiv definit ist genau dann wenn

$$B := \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

berechnet nach $B_{i-1,j-1} = A_{i,j} - \frac{a_{1,j}a_{1,i}}{a_{1,1}}$, $i,j \in \{1,2,3\}$, positiv definit ist. Da $B_{1,1} = 4 > 0$ gilt, ist diese Matrix ist wiederum positiv definit genau dann wenn

$$C := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

positiv definit ist. Da $C_{1,1} = 1 > 0$ gilt, liefert nochmaliges anwenden der gleichen Formel $D_{1,1} = C_{2,2} - \frac{(-1)^2}{1} = 1 > 0$. Also ist A positiv definit. Wir können außerdem die Zerlegung der Matrix in Diagonal- und Dreiecksmatrix angeben. Sie ergibt sich zu

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Aufgabe 2

a) i) Zunächst das charakteristische Polynom. Wie aus der linearen Algebra bekannt, ist eine Matrix positiv definit genau dann wenn alle Eigenwerte positiv sind. (vgl. Bemerkung 2.49 im Skript). Das Charakteristische Polynom ist:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -15-\lambda & 1 & \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 9\lambda^2 - 20\lambda + 4. \tag{5}$$

Am Vorzeichen des Terms mit der größten Potenz in λ lässt sich ablesen, dass es für große Argumente negative Werte annimmt. Zudem gilt $p(0) = 4, p(1) = -8, p\left(3+\sqrt{\frac{7}{3}}\right) = 80 + \sqrt{\frac{7}{3}}\frac{14}{3}$. Damit wissen wir, dass eine Nullstelle des Polynoms zwischen 0 und 1, eine zwischen 1 und $3+\sqrt{\frac{7}{3}}$ und eine bei größeren Werten als $3+\sqrt{\frac{7}{3}}$ liegt. Es sind also alle Nullstellen positiv und damit die Matrix positiv definit.

ii) Wir verwenden Bemerkung 2.50 im Skript und berechnen die Unterdeterminanten von A:

$$\det A = 4, \det \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 6, \det(1) = 1, \tag{6}$$

diese sind alle positiv, damit ist A positiv.

iii) Wir ergänzen direkt quadratisch. Für ein beliebiges $(x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} xAx^t &= x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 5x_2^2 + 2x_2x_3 + 3x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 - \frac{1}{4}x_3^2 + 2x_3^2 \\ &= (x_1 - x_2 + x_3)^2 + 4\left(x_2 + \frac{1}{4}x_3\right)^2 + \frac{7}{4}x_3^2. \end{aligned}$$

Dieser Ausdruck kann nur für $x = 0$ Null werden. Die Matrix ist also positiv definit.

b) i) Wir berechnen wieder das charakteristische Polynom. Es ergibt sich

$$p(\lambda) := \det(B - \lambda \mathbb{1}) = -1 - \lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3. \tag{7}$$

Diese Funktion ist negativ für $\lambda = 0$ und es gilt $p(-2) = 3 > 0$. Es gibt also eine Nullstelle zwischen -2 und 0, damit ist B nicht positiv definit.

ii) Wir berechnen die Unterdeterminanten. Es gilt

$$\det B = -1, \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = -1, \det(1) = 1, \tag{8}$$

diese sind nicht alle positiv. Also ist B nicht positiv definit.

iii) Wir ergänzen wieder direkt quadratisch. Sei dafür $(x_1, x_2, x_3) = x \in \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} xBx^t &= x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + 3x_2^2 + x_3^2 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_2x_3 - x_3^2 + x_2x_3 + 3x_2^2 + x_3 \\ &= (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - 2x_2x_3 = (x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - (x_2 + x_3)^2 + x_3^2. \end{aligned}$$

Das ist beispielsweise für $x_3 = 0, x_2 = 1 = -2x_1$ negativ, also ist B nicht positiv definit.

Aufgabe 3

Es gilt also für $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$\frac{\partial L}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} - \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial L}{\partial x} = 0. \tag{9}$$

Für positives σ und $t < T$

a) Wir definieren nun $f(\tilde{t}, \tilde{x}) := L(T - \sigma^{-2}\tilde{t}, \tilde{x} + \tilde{t}/2)$ und kürzen $u := (u_1, u_2) := (T - \sigma^{-2}\tilde{t}, \tilde{x} + \tilde{t}/2)$ ab. Es folgt mit der Kettenregel

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial \tilde{t}} = D_1L(u)\frac{\partial u_1}{\partial \tilde{t}} + D_2L(u)\frac{\partial u_2}{\partial \tilde{t}} = -\sigma^{-2}D_1L(u) + \frac{1}{2}D_2L(u) \\ &\overset{(9)}{=} -\frac{1}{2}D_2L(u) + \frac{1}{2}D_2L(u) + \frac{1}{2}D_2L(u) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(\tilde{t}, \tilde{x})}{\partial^2 \tilde{x}} \end{aligned}$$

b) Betrachten nun L als Funktion von den Variablen t und $S(t,x) = e^{rt}e^x$ anstatt als Funktion von t und x. Einsetzen in (9) und Anwenden der Kettenregel ergibt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-rt}C(t,S)\right) + \frac{\sigma^2}{2}e^{-rt}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial}{\partial S}\left(\frac{\partial S}{\partial x}C(t,S)\right) - \frac{\sigma^2}{2}e^{-rt}\frac{\partial S}{\partial x}\frac{\partial C(t,S)}{\partial S} \\ &= -rC(t,S) + D_1C(t,S) + \frac{\partial S}{\partial t}\frac{\partial C(t,S)}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S\frac{\partial C(t,S)}{\partial S} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial S^2} - \frac{\sigma^2}{2}S\frac{\partial C(t,S)}{\partial S} \\ &= -rC(t,S) + D_1C(t,S) + rSC(t,S) + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 C(t,S)}{\partial S^2}, \end{aligned}$$

wobei ab der zweiten Gleichheit der Faktor e^{-rt} weggelassen wurde. Wenn anschließend t, S als unabhängige Variablen behandelt werden ergibt sich die Differentialgleichung der Aufgabenstellung.

c) Wir erinnern uns an die Definition von $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$\Phi(y) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u. \tag{10}$$

Da f die einfache Wärmeleitgleichung löst, ist wegen Teil a) und b),

$$C(t,S) = e^{rt}L(t,x(t,S) = e^{rt}f\left(\sigma^2(T-t), x(t,S) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)\right) \tag{11}$$

eine Lösung der Black-Scholes Differentialgleichung, wobei wir die Umkehrung der Transformation $(\tilde{t},\tilde{x}) \mapsto (t,x) = (T-\sigma^{-2}\tilde{t}, \tilde{x}+\tilde{t}/2)$ gebildet haben, um $f(\tilde{t},\tilde{x})$ in den Variablen t und x auszudrücken. Außerdem gilt für $(t,S) \mapsto (T, S_T)$,

$$\sigma^2(T-t) \to 0, x(t,S) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) \to x_0 \tag{12}$$

wobei $x_0 := x(T,S_T) = -rT + \log S_T$. Da $f(t,x) \to g(x_0) = \max\{e^{x_0} - \tilde{K}, 0\}$, (siehe Aufgabe H11.6) falls $(t,x) \mapsto (0,x_0)$ mit $t > 0$, so gilt demnach

$$C(t,S) \to e^{rt}\max\{e^{x_0} - \tilde{K}, 0\} = \max\{S_T - K, 0\}, \quad \text{falls } (t,S) \to (T,S_T), \tag{13}$$

wobei wir $e^{x(T,S_T)} = e^{-rT}S_T$ und $\tilde{K} = e^{-rT}K$ benutzt haben. Es war also zweckmäßig $e^{-rT}K$ in der Definition von f in Aufgabe H11.6 für K einzusetzen. Explizit gilt

$$\begin{aligned} C(t,S) =& e^{rt+x(t,S)}\Phi\left(\frac{x(t,S) + \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + rT - \log K}{\sigma(T-t)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ & e^{rt}\tilde{K}\Phi\left(\frac{x(t,S) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t) + rT - \log K}{\sigma(T-t)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= S\Phi\left(\frac{\left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \log(S/K)}{\sigma(T-t)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &- e^{-r(T-t)}K\Phi\left(\frac{\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \log(S/K)}{\sigma(T-t)^{\frac{1}{2}}}\right) \\ &= S\Phi(g_+(t,S)) - Ke^{-rt(T-t)}\Phi(g_-(t,S)), \end{aligned} \tag{14}$$

wobei g_pm gegeben ist durch

$$g_\pm(t,S) := \frac{(r \pm \frac{\sigma^2}{2})(T-t) + \log(S/K)}{\sigma\sqrt{T-t}} = \sigma^{-1}(r \pm \frac{\sigma^2}{2})\sqrt{T-t} + \sigma^{-1}(T-t)^{-\frac{1}{2}}\log(S/K). \tag{15}$$

Es folgt

$$\begin{aligned}\partial_t C(t,S) =& S\Phi'(g_+(t,S))\partial_t g_+(t,S) - Kre^{-r(T-t)}\Phi(g_-(t,S)) \\ & - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(g_-(t,S))\partial_t g_-(t,S) \\ \partial_S C(t,S) =& \Phi(g_+(t,S)) + S\Phi'(g_+(t,S))\partial_S g_+(t,S) \\ & - Ke^{-r(T-t)}\Phi'(g_-(t,S))\partial_S g_-(t,S)\end{aligned}$$

Für die partiellen Ableitungen der Funktionen $g_\pm$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\partial_t g_\pm(t,S) =& -\frac{1}{\sigma 2}(r \pm \frac{\sigma^2}{2}) + \frac{1}{2\sigma}\log(S/K)(T-t) - \frac{3}{2} \\ \partial_S g_\pm(t,S) =& \sigma^{-1}S^{-1}(T-t)^{-\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Außerdem findet man durch einsetzen, dass $Ke^{-r(T-t)}\Phi'(g_-(t,S)) = S\Phi'(g_+(t,S))$ gilt. Aufgrund dessen und wegen $\partial_S g_+ = \partial_S g_-$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\partial_t C(t,S) &= -S\Phi'(g_+(t,S))\frac{\sigma}{2}(T-t)^{-\frac{1}{2}} - Kre^{-r(T-t)}\Phi(g_-(t,S)) \\ \partial_S C(t,S) &= \Phi(g_+(t,S)) \\ \partial_S^2 C(t,S) &= \Phi'(g_+(t,S))\partial_S g_+(t,S).\end{aligned}$$

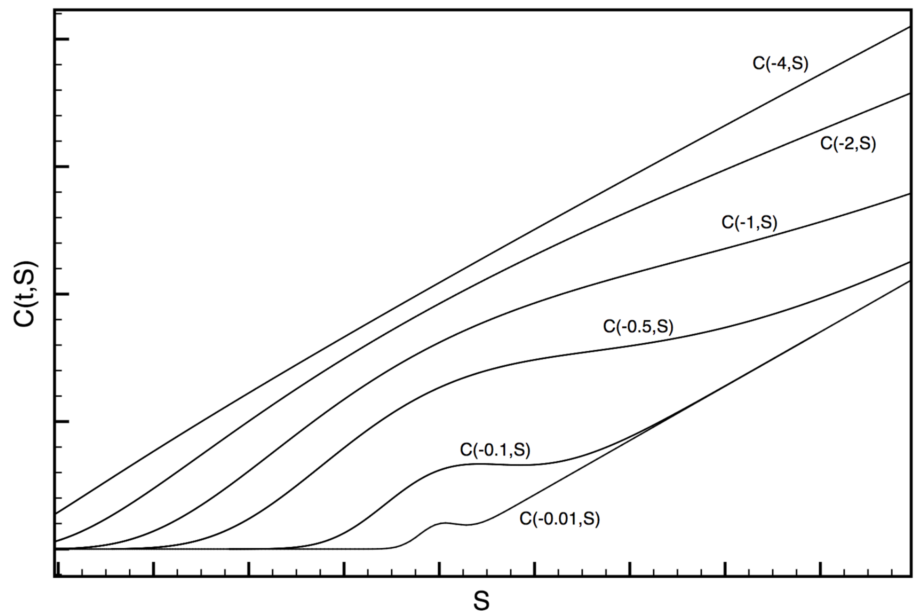
Es gilt also

$$\begin{aligned}rS\partial_S C(t,S) + \frac{\sigma^2}{2}S^2\partial_S^2 C(t,S) &= rS\Phi(g_+(t,S)) + S\Phi'(g_+(t,S))\frac{\sigma}{2}(T-t)^{-\frac{1}{2}} \\ rC(t,S) - \partial_t C(t,S) &= rS\Phi(g_+(t,S)) + S\Phi'(g_+(t,S))\frac{\sigma}{2}(T-t)^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}$$

d.h. C aus (14) löst in der Tat die Black-Scholes Differentialgleichung.

d) Einsetzen von $r = 0, T = 0, \sigma = 1$ und $K = 1$ in (14) ergibt

$$C(t,S) = S\Phi(\frac{1}{2}\sqrt{|t|} + \log(S)|t|^{-\frac{1}{2}}) - \Phi(-\frac{1}{2}\sqrt{|t|} + \log(S)|t|^{-\frac{1}{2}}) \tag{16}$$



Aufgabe 4

Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

a) Sei $(a_{i,j})_{i,j\in\{1,\dots,n\}} = A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Wir erinnern uns an die Definition der Ableitung und die Leibniz-Formel der Determinante. Es gilt

$$d\det_{\mathbb{1}}(A) = \lim_{h\to 0} \frac{\det(\mathbb{1} + hA) - \det(\mathbb{1})}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{n} (\delta_{l,\sigma(l)} + ha_{l,\sigma(l)}) - 1\right),$$

wobei S_n die Menge aller Permutationen der Menge $\{1,\dots,n\}$ und sgn das Vorzeichen der Permutation bezeichnet. In der Summe über alle Permutationen σ sind alle Terme außer dem zur Identität gehörenden $\mathcal{O}(h^2)$, denn da σ nicht die Identität ist gibt es $l \in \{1,\dots,n\}$ mit $\sigma(l) \neq l$, daraus folgt aber direkt dass $\sigma(\sigma(l)) \neq \sigma(l)$ gilt (Injektivität). Damit gibt es mindestens zwei Faktoren im Produkt in dem das Kronecker-Delta nicht zur Summe beiträgt. Diese Terme verschwinden alle im Limes, wir betrachten also nur den Verbleibenden. Hier multiplizieren wir das Produkt aus:

$$\begin{aligned} d\det_{\mathbb{1}}(A) &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\prod_{l=1}^{n} (\delta_{l,l} + ha_{l,l}) - 1\right) \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\sum_{(\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{l=1}^{n} (\delta_{\alpha_l,0} + \delta_{\alpha_l,1} ha_{l,l}) - 1\right). \end{aligned}$$

In dieser Summe kürzt sich der (in Multiindexnotation) Term mit $|\alpha| = 0$, während alle Terme mit $|\alpha| \geq 2$ wieder im Limes verschwinden. In der Summe bleiben also nur Multiindizes die überall außer an einer stelle eine Null haben, dabei wird das Produkt immer gleich $ha_{l,l}$ mit $\alpha_l = 1$. Damit ergibt sich

$$d\det_{\mathbb{1}}(A) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \sum_{k=1}^{n} ha_{k,k} = \operatorname{Spur} A \tag{17}$$

b) Seien nun $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mit $\det B \neq 0$ gegeben. Es gibt also B^{-1}. Für die Ableitung der Determinante ergibt sich mit den Rechenregeln der Determinante

$$\begin{aligned} d\det_B(A) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \left(\det(B + hA) - \det B\right) &= \lim_{h\to 0} \frac{\det B}{h} \left(\det(\mathbb{1} + hB^{-1}A) - 1\right) \\ &= \det(B) d\det_{\mathbb{1}}(B^{-1}A) = \det(B)\operatorname{Spur}(B^{-1}A) \end{aligned}$$

c) Wir verwenden erneut die Leibniz-Formel für die Determinante. Diese gibt uns, dass $\det(\mathbb{1} + tA)$ gleich einem Polynom in t ist. Da jedes Polynom gleich seinem Taylorpolynom ist, ist die Aufgabe gelöst wenn wir dieses Polynom auf die gewünschte Gestalt bringen können. Für die Rechnung erinnern wir uns daran, dass jede Permutationσ der Menge $\{1,\dots,n\}$ zerlegt werden kann in $k \leq n$ Transposition und das Vorzeichen $\operatorname{sgn}(\sigma)$ von σ gleich $(-1)^k$ ist. Falls σ eine Teilmenge $K \subseteq \{1,\dots,n\}$ invariant lässt und mit der Permutation τ von $I := \{1,\dots,n\}\backslash K$ eingeschränkt auf I übereinstimmt, so folgt, $\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)$, denn τ besteht aus den gleichen Transpositionen wie σ. Insgesamt ergibt sich

$$\begin{aligned}
\det(\mathbb{1} + tA) &= \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l=1}^{n} (\delta_{l,\sigma(l)} + t a_{l,\sigma(l)}) \\
&\overset{\text{ausmultiplizieren}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{I \subseteq 1,\ldots,n} \prod_{l \in I} (t a_{l,\sigma(l)}) \prod_{k \in I^c} \delta_{k,\sigma(k)} \\
&= \sum_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} t^{|I|} \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l \in I} a_{l,\sigma(l)} \prod_{k \in I^c} \delta_{k,\sigma(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} t^k \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{l \in I} a_{l,\sigma(l)} \prod_{k \in I^c} \delta_{k,\sigma(k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} t^k \sum_{\tau \in \text{Permutationen von } I} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{l \in I} a_{l,\tau(l)} = \sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ |I|=k}} t^k \det A_{I,I}.
\end{aligned}$$

□