Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 2

(a) Sei $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = (e^{x_1x_2-x_3}, e^{x_1x_2+x_3}, e^{x_2x_3})$ und

$$dg(y_1, y_2, y_3) = y_2y_3dy_1 + y_1y_3dy_2 + y_1y_2dy_3. \qquad (\star)$$

Wir berechnen $f * dg$ auf folgende zwei Arten.

(1) Wir berechnen $dy_i, i = 1, 2, 3$ und setzen das Ergebnis in $(\star)$ ein.

$$\begin{aligned} dy_1 &= e^{x_1x_2-x_3}(x_2dx_1 + x_1dx_2 - dx_3) \\ dy_2 &= e^{x_1x_2+x_3}(x_2dx_1 + x_1dx_2 + dx_3) \\ dy_3 &= e^{x_2x_3}(x_3dx_2 + x_2dx_3) \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} (f * dg)_{(x_1,x_2,x_3)} &= e^{x_1x_2+x_3+x_2x_3}(e^{x_1x_2+x_3})(x_2dx_1 + x_1dx_2 - dx_3)) \\ &+ e^{x_1x_2-x_3+x_2x_3}(e^{x_1x_2-x_3})(x_2dx_1 + x_1dx_2 + dx_3)) \\ &+ e^{2x_1x_2}(e^{x_2x_3})(x_3dx_2 + x_2dx_3)) \\ &= e^{2x_1x_2+x_2x_3}(2x_2dx_1 + (2x_1 + x_3)dx_2 + x_2dx_3). \end{aligned}$$

(2) Sei $g(y_1, y_2, y_3) = y_1y_2y_3$. Wir sehen, dass g $(\star)$ erfüllt. Berechnen wir also $g \circ f$

$$g \circ f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1x_2-x_3}e^{x_1x_2+x_3}e^{x_2x_3} = e^{2x_1x_2+x_2x_3}$$

und erhalten damit

$$f * dg_{(x_1,x_2,x_3)} = d(g \circ f)_{(x_1,x_2,x_3)} = e^{2x_1x_2+x_2x_3}(2x_2dx_1 + (2x_1 + x_3)dx_2 + x_2dx_3)$$

(b) Sei $f(x_1, x_2, x_3) = (y_1, y_2, y_3) = \left(\frac{x_1}{x_1+x_2+x_3}, \frac{x_2}{x_1+x_2+x_3}, x_1 + x_2 + x_3\right)$ und weiter sei dg gegeben durch

$$dg(y_1, y_2, y_3) = e^{y_1y_3+2y_2y_3}(y_3dy_1 + 2y_3dy_2 + (y_1 + 2y_2)dy_3). \qquad (\star)$$

(1) Wir berechnen zuerst dy_i und setzen dann in $(\star)$ ein.

$$\begin{aligned} dy_1 &= \frac{x_2 + x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_1 + \frac{-x_1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_2 + \frac{-x_1}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_3 \\ dy_2 &= \frac{-x_2}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_1 + \frac{x_1 + x_3}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_2 + \frac{-x_2}{(x_1 + x_2 + x_3)^2}dx_3 \\ dy_3 &= dx_1 + dx_2 + dx_3 \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} f * dg_{(x_1,x_2,x_3)} = e^{x_1+2x_2} \Bigg[&\frac{x_2 + x_3}{x_1 + x_2 + x_3}dx_1 + \frac{-x_1}{x_1 + x_2 + x_3}dx_2 + \frac{-x_1}{x_1 + x_2 + x_3}dx_x \\ &+ \frac{-2x_2}{x_1 + x_2 + x_3}dx_1 + \frac{2x_1 + 2x_3}{x_1 + x_2 + x_3}dx_2 + \frac{-2x_2}{x_1 + x_2 + x_3}dx_3 \\ &+ \frac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2 + x_3}(dx_1 + dx_2 + dx_3)\Bigg] = e^{x_1+2x_2}(dx_1 + 2dx_2). \end{aligned}$$

(2) Sei $g(y_1, y_2, y_3) = e^{y_1 y_3 + 2y_2 y_3}$. Dann erfüllt $g(\star)$ und wir erhalten

$$g \circ f(x_1, x_2, x_3) = e^{x_1 + 2x_2},$$

sowie

$$f * dg_{(x_1,x_2,x_3)} = d(g \circ f)_{(x_1,x_2,x_3)} = e^{x_1+2x_2}(dx_1 + 2dx_2)$$

Aufgabe 3

(a) Ist $h = D^2 f$ für eine glatte Funktion f, dann gilt für alle $i, j, k \in \{1, ..., n\}$, $H_{i,k} = D_i D_k f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ und somit folgt aus der Vertauschbarkeit partieller Ableitungen sofort

$$D_j H_{i,k} = D_j D_i D_k f = D_i D_j D_k f = D_i H_{j,k}.$$

(b) Wir folgen zuerst den Hinweisen:

(i) Wir berechnen separat für $i, j \in \{1, ..., n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_j}[x_i H_{ik}(\lambda x)] = \begin{cases} \lambda x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} H_{ik}\right)(\lambda x), & i \neq j \\ H_{ik}(\lambda x) + \lambda x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} H_{ik}\right)(\lambda x), & i = j \end{cases}.$$

Somit erhalten wir

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[x_i H_{ik}(\lambda x)] = H_{jk}(\lambda x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} H_{ik}\right)(\lambda x)$$

und weiter unter Verwendung der Kettenregel für $j \in \{1, ..., n\}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda H_{jk}(\lambda x)] &= H_{jk}(\lambda x) + \sum_{i=1}^{n} \lambda \left(\frac{\partial}{\partial x_i} H_{j,k}\right)(\lambda x) \cdot x_i \\ &= H_{jk}(\lambda x) + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\frac{\partial}{\partial x_j} H_{ik}\right)(\lambda x) \end{aligned}$$

da nach Voraussetzung $\frac{\partial}{\partial x_j} H_{ik} = \frac{\partial}{\partial x_i} H_{jk}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$ gilt.

(ii) Wir berechnen direkt unter Verwendung von Linearität und Lemma 2.7

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_j} g_k(x) &= \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_{i=1}^{n} \int_0^1 x_i H_{ik}(\lambda x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}[x_i H_{ik}(\lambda x)]\, \mathrm{d}\lambda \\ &\overset{(i)}{=} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda H_{jk}(\lambda x)]\, \mathrm{d}\lambda = \lambda H_{jk}(\lambda x)\Big|_0^1 = H_{jk}(x). \end{aligned}$$

Aus der Symmetrie von H folgt die zweite Gleichung.

(iii) Funktioniert komplett analog zu (i) wobei wir die Kommutativitätseigenschaft aus (ii) verwenden.

(iv) Analog zu (ii) können wir auch hier Integral und Ableitung vertauschen und erhalten somit mit Teil (iii)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) &= \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 x_j g_j(\lambda x)\, \mathrm{d}\lambda = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}[x_j g_j(\lambda x)]\, \mathrm{d}\lambda \\ &= \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \lambda}[\lambda g_k(\lambda x)]\, \mathrm{d}\lambda = g_k(x). \end{aligned}$$

Fassen wir Hinweise (i)-(iv) zusammen erhalten wir für alle $i, j \in \{1, ...n\}$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j} f \overset{(iv)}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} g_j(x) \overset{(ii)}{=} H_{ij}$$

und somit ist $H = D^2 f$.

Aufgabe 4

Wir wiederholen zunächst die Definition der Länge einer stetig differenzierbaren Kurve $k : [a, b] \to U$ (z.B. Forster, Analysis II, §4, Satz 1).

Ist $U \subset \mathbb{R}$, dann folgt aus Stetigkeit schon gleichmäßige Stetigkeit und somit $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$, sodass $|k'(t) - k'(s)| \le \varepsilon$ für alle t, s mit $|t - s| \le \delta$. Für $t' \in \overline{U_\delta(t)} \subset [a, b], t < t'$ gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $s \in [t, t']$ mit $\frac{k(t')-k(t)}{t'-t} = k'(s)$, also

$$\left| \frac{k(t') - k(t)}{t' - t} - k'(t) \right| = |k'(s) - k'(t)| \le \varepsilon.$$

Sei nun $k : [a, b] \to U \subset \mathbb{R}^n$, dann folgt aus der Äquivalenz aller Normen auf $\mathbb{R}^n$ die Existenz eines $c > 0$ so, dass

$$\left\| \frac{k(t') - k(t)}{t' - t} - k'(t) \right\| \le c \max_{1 \le i \le n} \left| \frac{k_i(t') - k_i(t)}{t' - t} - k_i'(t) \right| \le c\varepsilon =: \varepsilon'$$

für alle t, t' mit $|t - t'| < \delta$.
Sei $\hat{\varepsilon}$ fest. Nach Definition des Integrals (Analysis I, 5.1 und 5.4) gibt es ein δ' so , dass

$$\left| \int_a^b \|f(t)\| \,\mathrm{d}t - \sum_{i=1}^k \|f'(t_i)\|(t_i - t_{i-1}) \right| \le \frac{\hat{\varepsilon}}{2}$$

für alle Zerlegungen $a = t_0 < t_1 < ... < t_k = b, t_i - t_{i-1} \le \delta',\ \forall\ 1 \le i \le k$. Wie wir schon gesehen haben gibt es jetzt ein $\hat{\delta} \le \delta'$ so, dass aus $|t_i - t_{i-1}| < \hat{\delta}$ schon

$$\left\| \frac{k(t_i) - k(t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} - k'(t_i) \right\| \le \frac{\hat{\varepsilon}}{2(b - a)},\ \forall\ 1 \le i \le n$$

folgt. Nach Multiplikation mit $t_i - t_{i-1}$ und aufsummieren liefern unsere beiden Abschätzungen und die Dreiecksungleichung schon

$$\left| \sum_{i=1}^k \|k(t_i) - k(t_{i-1})\| - \int_a^b \|k'(t)\| \,\mathrm{d}t \right| \le \frac{\hat{\varepsilon} \sum_{i=1}^k (t_i - t_{i-1})}{2(b - a)} + \frac{\hat{\varepsilon}}{2} = \hat{\varepsilon}.$$

Der linke Term konvergiert mit zunehmender Feinheit der Zerlegung gegen die Länge, d.h.

$$L(k) = \int_a^b \|k'(t)\| \,\mathrm{d}t \le (b - a) \max_{t \in [a,b]} \|k'(t)\| < \infty.$$

Nun zur eigentlichen Aufgabe: f ist stetig-differenzierbar, also ist $f \circ k$ eine stetig differenzierbare Kurve. Nach der Kettenregel gilt

$$D(f \circ g) = (Df)(k(s))k'(s)$$

und

$$L(f \circ k) = \int_a^b \sqrt{k'(s)^t g(k(s))k'(s)} \,\mathrm{d}s$$

folgt aus der Definition der Standartnorm. Für $f_P(r,\phi) := (r\cos\phi, r\sin\phi)$ ist wegen $(Df)(r,\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}$ die Riemannsche Metrik gleich

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

Entsprechend gilt für $f_K(r,\theta,\phi) := (r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$

$$(Df_K)(r,\theta,\phi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie und $\sin^2 + \cos^2 = 1$ erhält man die Form der Riemannsche Metrik

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\sin^2\phi \end{pmatrix}.$$

Für die Kurve $\gamma : s \to f_P(r(s), \phi(s)) = f_P(e^s, s) \subset \mathbb{R}^2$ erhalten wir

$$(e^s, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{2s} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^s \\ 1 \end{pmatrix} = 2e^{2s} \Rightarrow L(\gamma) = e\sqrt{2}.$$

Aufgabe 5

Sei $h(x) = \left(\frac{x}{2}, \frac{xf(0,b)}{2}\right)$. Nach reeller Ketten- und Produktregel und mehrdimensionaler Kettenregel gilt $z'(x) = f \circ h + x \cdot (Df)(h) \cdot (Dh)(x)$, also

$$z'(x) = f\left(\frac{x}{2}, b + \frac{f(0,b)}{2}\right) + \frac{x}{2}(D_x f + f(0,b)D_y f)\left(\frac{x}{2}, b + \frac{xf(0,b)}{2}\right).$$

Entsprechend ergibt sich

$$z''(x) = 2(Df)(h) \cdot (Dh)(x) + \frac{x}{4}((D_x D_x + f(0,b)(D_x D_y + D_y D_x) + f(0,b)^2 D_y D_y)f)(h(x)).$$

Für eine beliebige Lösung y ist

$$y''(x) = Df(x, y(x) = (D_x f, D_y f)(x,y)(1, y'(x))^t.$$

Auswerten bei 0 liefert

$$z(0) = b = y(0), \qquad z'(0) = f(0,b) = y'(0), \qquad z''(0) = (D_x f + f(0,b)D_y f)(0,b) = y''(0)$$

Aufgabe 6

Wegen $e^y - K \geq 0 \Leftrightarrow y \geq \log(K)$ gilt

$$f(x,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(x-y)^2}{2t}} g(y) dy.$$

Jetzt können mit Φ mittels der Transformation $\varphi_t : u \to t^{-1/2}(u-t-x)$ mit $\varphi_t^{-1} : y \to yt^{1/2} + t + x$ umschreiben in

$$\begin{aligned}
\Phi(t^{-1/2}(x+t-\log K)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{t^{-1/2}(\log(K)-x-t)}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(t^{-1/2}(u-t-x))^2}{2}} t^{-1/2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(u-x)^2}{2t}} e^{-\frac{(2(u-x)-t}{2}} du \\
&= \frac{e^{-(x+t/2)}}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(u-x))^2}{2t}} du
\end{aligned}$$

Analog erhält man mit der Transformation $\varphi_0 : u \to t^{-1/2}(u-x)$ mit Umkehrung $\varphi_0^{-1} : y \to yt^{1/2} + x$

$$\begin{aligned}
\Phi(t^{-1/2}(x-\log K)) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{t^{-1/2}(\log(K)-x)}^{\infty} e^{-\frac{2}{2}} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(t^{-1/2}(u-x))^2}{2}} t^{-1/2} du \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int\limits_{\log(K)}^{\infty} e^{-\frac{(u-x))^2}{2t}} du
\end{aligned}$$

Es folgt $f(t,x) = e^{x+t/2}\Phi(t^{-1/2}(x+t-\log K)) - K\Phi(t^{-1/2}(x-\log K))$. Bevor wir dieses Integral ableiten, berechnen wir die inneren Ableitungen zu

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}(t^{-1/2}(x+t-\log K)) = \frac{t^{-1}(\log K - x) + 1}{2\sqrt{t}}, \\
&\frac{\partial}{\partial x}(t^{-1/2}(x+t-\log K)) = t^{-1/2}, \\
&\frac{\partial}{\partial t}(t^{-1/2}(x-\log K)) = \frac{t^{-1}(\log K - x)}{2\sqrt{t}}, \\
&\frac{\partial}{\partial z}\Phi(z) = e^{-z^2/2}.
\end{aligned}$$

Mit der Ketten- und Produktregel ergibt sich jetzt

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) &= \frac{e^{x+t/2}}{2}\left(1+\frac{t^{-1}(\log K - x)+1}{\sqrt{t}}e^{-(t^{-1/2}(x+t-\log K))^2/2}\right)+ ... \\
&\quad ... + \frac{Kt^{-1}(x-\log K)}{2\sqrt{t}}e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} \\
&= \frac{e^{x+t/2}}{2}+\frac{t^{-1}(\log K - x)+1}{2\sqrt{t}}e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} + ... \\
&\quad ... + \frac{Kt^{-1}(x-\log K)}{2\sqrt{t}}e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} \\
&= \frac{e^{x+t/2}}{2}+\frac{K}{2\sqrt{t}}e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}\frac{\partial^2}{\partial x^2}f(t,x) &= \frac{e^{x+t/2}}{2}\left(1+(2t^{-1/2}-t^{-3/2}(x+t-\log K))e^{-(t^{-1/2}(x+t-\log K))^2/2}\right)+ ... \\
&\quad ... + Kt^{-3/2}(x-\log K)e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2} \\
&= \frac{e^{x+t/2}}{2}+\frac{K}{2\sqrt{t}}e^{-(t^{-1/2}(x-\log K))^2/2}
\end{aligned}$$

Dies zeigt die Identität

$$\frac{\partial}{\partial t}f(t,x) = \frac{\Delta}{2}f(t,x).$$