Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

a) Sei $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$ gegeben. Wir berechnen

1. $D_1 f(x,y,z) = \frac{y-x}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$
2. $D_2 f(x,y,z) = \frac{x-y}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$
3. $D_3 f(x,y,z) = \frac{(x-y)^2-z}{z^2 2\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)}$.

Also folgt

$$\nabla f = \frac{x-y}{z\sqrt{2\pi z}} e^{-(x-y)^2/(2z)} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ \frac{x-y}{2z} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

b) Sei $(a_1, \dots, a_n) = a \in \mathbb{R}^n$, $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, f(x) = \langle a, x \rangle$. Wir berechnen für $k \in \{1, \dots, n\}$

$$D_k f(x) = D_k \sum_{l=1}^{n} a_l x_l = a_l, \tag{2}$$

also folgt

$$\nabla f(x) = a. \tag{3}$$

c) Es sei $f : \mathbb{R}^n \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \|x\|_2^\alpha$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir berechnen

$$D_k \|x\|_2^\alpha = D_k \left(\sum_{l=1}^{n} x_l^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}} = \alpha x_k \left(\sum_{l=1}^{n} x_l^2 \right)^{\frac{\alpha}{2}-1} = \alpha x_k \|x\|_2^{\alpha-2}. \tag{4}$$

Es folgt $\nabla \|x\|_2^\alpha = \alpha x \|x\|_2^{\alpha-2}$.

d) Sei $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{\langle a,x \rangle}{\|x\|_2^3}$ mit $a \in \mathbb{R}^2$. Wir verwenden b und c, damit gilt

$$\nabla \frac{\langle a,x \rangle}{\|x\|_2^3} = \|x\|_2^{-3} \nabla \langle a,x \rangle + \langle a,x \rangle \nabla \|x\|_2^{-3} = a\|x\|_2^{-3} - 3\langle a,x \rangle x \|x\|_2^{-5}. \tag{5}$$

Aufgabe 2

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, f(x,y) = x^2 + y^2$. Wir berechnen dessen Ableitung an der Stelle $(x_0, y_0) = (3,4)$ wirkend auf $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

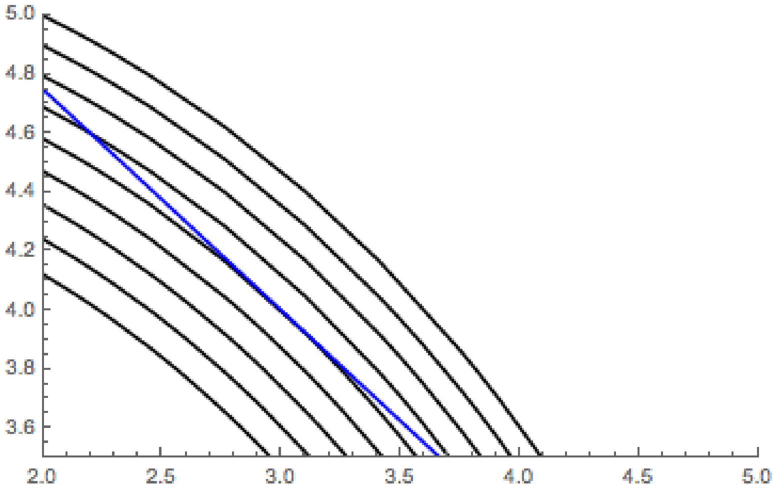
$$\mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) = \nabla(f)(x-x_0, y-y_0) = 2 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} (x-x_0, y-y_0) \tag{6}$$

$$= 2x_0(x-x_0) + 2y_0(y-y_0) = 6(x-3) + 8(y-4). \tag{7}$$

Damit ist die Linearisierung g von f an der Stelle $(3,4)$

$$g(x,y) = f(3,4) + \mathrm{d}f_{(x_0,y_0)}(x-x_0, y-y_0) = 25 + 6(x-3) + 8(y-4). \tag{8}$$

Wir zeichnen die Niveaugerade $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid g(x,y) = 25\}$ blau und Niveaukreise $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c = f(x,y)\}$ für $c = 21, \ldots, 29$ schwarz.



Die Gerade approximiert den Niveaukreis zu c=25 nahe an der Stelle $(3,4)$ sehr gut und weicht weiter davon entfernt stark davon ab.

Aufgabe 3

Sei $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, f(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}$ gegeben. Wir berechnen

$$\frac{\partial}{\partial t} f(x,t) = -\frac{n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} + \frac{\|x\|_2^2}{2t} t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}}, \tag{9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x_l^2} f(x,t) = t^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial^2}{\partial x_l^2} e^{-\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{2t}} = t^{-\frac{n}{2}} \frac{\partial}{\partial x_l} \frac{-1}{t} x_l e^{-\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{2t}} \tag{10}$$

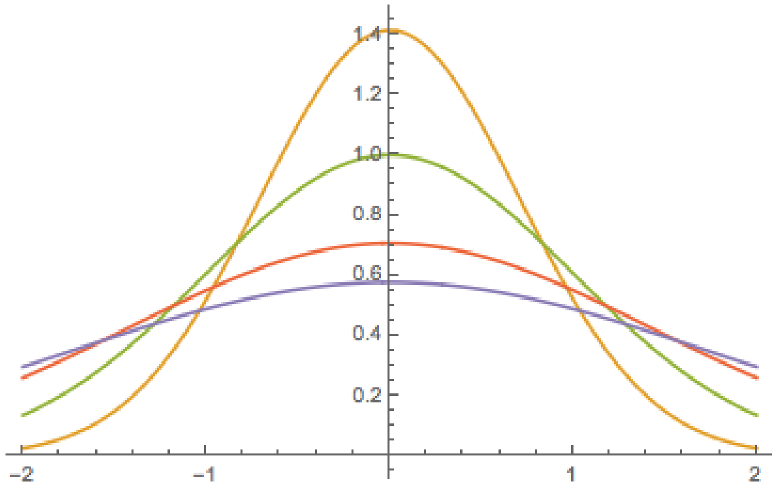
$$= -t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{2t}} + t^{-\frac{n+2}{2}} \frac{x_l^2}{t} e^{-\frac{\sum_{k=1}^n x_k^2}{2t}} = -t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} + \frac{x_l^2}{t} t^{-\frac{n+2}{2}}. \tag{11}$$

Wir summieren die letzte Gleichung von $l = 1, \ldots, n$, dann folgt

$$\frac{1}{2} \Delta f(x,t) = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n \left(-t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} + \frac{x_l^2}{t} t^{-\frac{n+2}{2}} \right) \tag{12}$$

$$= -\frac{n}{2} t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} + \frac{\|x\|_2^2}{2t} t^{-\frac{n+2}{2}} e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2t}} = \frac{\partial}{\partial t} f(x,t) \tag{13}$$

Diese Lösung der Wärmeleitgleichung beschreibt wie sich die Wärme beispielsweise in einem Stab ausbreitet wenn sie ursprünglich, für t nahe bei 0, sehr stark konzentriert um $x = 0$ sehr hoch ist. Die Lösung sind breiter werdende Gaussglocken. Die Skizze zeigt solche Glocken für $t = 0.5, 1, 2, 3$ in orange, grün, rot und lila.



Aufgabe 4

a) Die Kettenregel wird durch Satz 2.24 in Skript gegeben. Sie lautet (etwas vereinfacht) für $f : U \to V, g : V \to W$, mit U, V, W normierte Räume und U, V offen, f in $x \in U$ differenzierbar und g in $f(x)$ differenzierbar:

$$\mathrm{d}(f \circ g)_x = \mathrm{d}g_{f(x)}\mathrm{d}f_x \tag{14}$$

oder in Komponentenschreibweise für $U, V, W = \mathbb{R}^l, \mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n$, mit $m, l, n \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, \dots, x_l), y = (y_1, \dots, y_m) = f(x), z = (z_1, \dots, z_n) = g(y)$

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z_i}{\partial y_j} \frac{\partial y_j}{\partial x_k}. \tag{15}$$

b) Seine y, f und p wie in der Aufgabenstellung. Aus der Analysis 1 wissen wir, dass das Taylorpolynom 3. Grades von y um die 0 (im folgenden mit T bezeichnet) folgende Gestalt hat

$$T(x) = p(x) = \sum_{k=0,3} \frac{y^{(k)}}{k!}. \tag{16}$$

Daraus ergibt sich $c_0 = y(0) = 0$, $c_1 = y'(0) = f(0, y(0) = f(0, 0)$. Aus a) ergibt sich mit der Kettenregel für den nächsten Koeffizienten

$$2!c_2 = y''(0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y'(x)\bigg|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x))\bigg|_{x=0} = \mathrm{d}f_{x,y(x)} \circ \mathrm{d}(x, y(x))\big|_{x=0} \tag{17}$$

$$= (D_1 f(x, y(x)), D_2 f(x, y(x))) \begin{pmatrix} 1 \\ y'(x) \end{pmatrix}\bigg|_{x=0} \tag{18}$$

$$= (D_1 f(x, y(x)), D_2 f(x, y(x))) \begin{pmatrix} 1 \\ f(x, y(x)) \end{pmatrix}\bigg|_{x=0} \tag{19}$$

$$= D_1 f(x, y(x))|_{x=0} + D_2 f(x, y(x)) f(x, y(x))|_{x=0} = D_1 f(0, 0) + D_2 f(0, 0) f(0, 0) \tag{20}$$

$$= f_{(1,0)} + f_{(0,1)} f_{(0,0)}, \tag{21}$$

wobei in der letzten Zeile die abkürzende Notation aus der Aufgabenstellung verwendet wurde. Für den letzten Koeffizienten ergibt sich mit der Produktregel

$$3!c_3 = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} y''(x)\bigg|_{x=0} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_1 f(x, y(x))\bigg|_{x=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_2 f(x, y(x)) f(x, y(x))\bigg|_{x=0}$$
$$= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_1 f(x, y(x))\bigg|_{x=0} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} D_2 f(x, y(x))\bigg|_{x=0} f(0, 0) + D_2 f(0, 0) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x, y(x))\bigg|_{x=0}.$$

Nun verwenden wir (20) mit der Substitution $D_1 f$, $D_2 f$ und f für f,

$$\begin{aligned}
3!c_3 = {} & D_1 D_1 f(x, y(x))|_{x=0} + D_2 D_1 f(x, y(x)) f(x, y(x))|_{x=0} \\
& + D_1 D_2 f(x, y(x))|_{x=0} f(0,0) + D_2 D_2 f(x, y(x)) f(x, y(x))|_{x=0} f(0,0) \\
& + D_2 f(0,0)\ D_1 f(x, y(x))|_{x=0} + D_2 f(0,0)\ D_2 f(x, y(x)) f(x, y(x))|_{x=0} \\
& = D^{(2,0)} f(0,0) + 2 f(0,0) D^{(1,1)} f(0,0) + (f(0,0))^2 D^{(0,2)} f(0,0) \\
& + D^{(0,1)} f(0,0) D^{(1,0)} f(0,0) + f(0,0) D^{(0,1)} f(0,0) D^{(0,1)} f(0,0) \\
& = f_{(2,0)} + 2 f_{(0,0)} f_{(1,1)} + (f_{(0,0)})^2 f_{(0,2)} + f_{(0,1)} f_{(1,0)} + f_{(0,0)} f_{(0,1)} f_{(0,1)},
\end{aligned}$$

wobei auch hier in der letzten Zeile die abkürzende Notation aus der Aufgabenstellung verwendet wurde.

Aufgabe 5

Seien $n \in \mathbb{N}, V \subseteq \mathbb{R}^n, U \in O(n), g \in C^2(UV, \mathbb{R})$ und $f : V \to \mathbb{R}$ wie in der Aufgabenstellung. Sei $x \in V$, dann gilt $(Ux)_k = \sum_{l=1}^n U_{k,l} x_l$. Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\Delta f(x) &= \sum_{k=1}^n D_k D_k f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} f(x) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} g(Ux) \\
&= \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} g\Big(\sum_{l=1}^n U_{1,l} x_l, \ldots, \sum_{l=1}^n U_{n,l} x_l\Big) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{a=1}^n U_{k,a} D_a g\Big(\sum_{l=1}^n U_{1,l} x_l, \ldots, \sum_{l=1}^n U_{n,l} x_l\Big) \\
&= \sum_{k=1}^n \sum_{b=1}^n U_{k,b} \sum_{a=1}^n U_{k,a} D_b D_a g(Ux) = \sum_{b=1}^n \sum_{a=1}^n (U^T U)_{b,a} D_b D_a g(Ux) \overset{U^T U = \mathbb{1}}{=} \sum_{b=1}^n \sum_{a=1}^n \delta_{b,a} D_b D_a g(Ux) \\
&= \sum_{a=1}^n D_a D_a g(Ux) = \Delta g(Ux),
\end{aligned}$$

wobei Orthogonalität verwendet wurde.

Aufgabe 6

Seien f und g wie in der Aufgabenstellung gegeben. Für diese Aufgabe benötigen wir ein paar zusätzliche Beziehungen. Wir benennen die beiden kartesischen Koordinaten von $\mathbb{R}^2$ mit x und y dann gilt $x = r\cos\phi$ und $y = r \sin\phi$. Damit folgt $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ und $\tan\phi = \frac{y}{x}$ also folgt auch

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{r} = \cos\phi \wedge \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{r} = \sin\phi \tag{22}$$

und

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \arctan\frac{y}{x}}{\partial x} = \frac{-\frac{y}{x^2}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{-1}{r}\sin\phi \wedge \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\frac{1}{x}}{1+\frac{y^2}{x^2}} = \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{r}\cos\phi. \tag{23}$$

An Punkten für die $(x', y') = 0$ gilt wird die Ableitung stetig auf diesen Punkt fortgesetzt. Damit können wir die Ableitung einer beliebigen Funktion $h : (r, \phi) \mapsto h(r, \phi) \in \mathbb{C}$ nach den kartesischen Koordinaten bestimmen: Es ergibt sich

$$\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial \phi} = \cos\phi \frac{\partial h(r,\phi)}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial\phi} \tag{24}$$

$$\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial r} + \frac{\partial \phi}{\partial y}\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial \phi} = \sin\phi \frac{\partial h(r,\phi)}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial h(r,\phi)}{\partial\phi}. \tag{25}$$

Nun bestimmen wir mit Hilfe dieser beiden Gleichungen $\Delta g(r,\phi)$:

$$\begin{aligned}
\Delta g(r,\phi) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} g(r,\phi) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} g(r,\phi) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\phi \frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\phi \frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos\phi \frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sin\phi \frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right).
\end{aligned}$$

An dieser Stelle setzen wir erneut die Gleichungen für die Ableitungen nach kartesischen Koordinaten ein. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\Delta g(r,\phi) = &= \cos\phi \frac{\partial\left(\cos\phi\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r}\right)}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial\left(\cos\phi\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r}\right)}{\partial \phi} \\
&- \cos\phi \frac{\partial\left(\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right)}{\partial r} + \frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial\left(\frac{\sin\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right)}{\partial \phi} \\
&+ \sin\phi \frac{\partial\left(\sin\phi\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r}\right)}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial\left(\sin\phi\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r}\right)}{\partial \phi} \\
&+ \sin\phi \frac{\partial\left(\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right)}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial\left(\frac{\cos\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial \phi}\right)}{\partial \phi}.
\end{aligned}$$

Nun verwenden wir die Produktregel und sortieren die Terme neu. Es kürzen sich sehr viele Terme heraus:

$$\begin{aligned}
&= \cos^2\phi \frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial r^2} + \frac{\sin^2\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r} - \frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial\phi\partial r} \\
&+ \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial\phi} - \frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial r\partial\phi} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial\phi} + \frac{\sin^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial^2\phi} \\
&+ \sin^2\phi \frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial r^2} + \frac{\cos^2\phi}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r} + \frac{\cos\phi\sin\phi}{r}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial\phi\partial r} \\
&- \frac{\sin\phi\cos\phi}{r^2}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial\phi} + \frac{\sin\phi\cos\phi}{r}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial r\partial\phi} - \frac{\cos\phi\sin\phi}{r^2}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial\phi} + \frac{\cos^2\phi}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial\phi^2} \\
&= \frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g(r,\phi)}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g(r,\phi)}{\partial\phi^2}.
\end{aligned}$$

Das war zu zeigen.

Aufgabe 7

Es seien $g : (\mathbb{R}^2\backslash\{0\}) \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{C}$ glatt mit $g(x,y,t) = e^{-t} f(x,y)$ gegeben. Seien $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ beliebig. Es soll zudem

$$\frac{\partial}{\partial t} g(x,y,t) = \Delta g(x,y,t) \tag{26}$$

gelten.

a) Dann folgt für f

$$\frac{\partial}{\partial t} e^{-t} f(x,y) = \Delta e^{-t} f(x,y) \iff -e^{-t} f(x,y) = e^{-t}\Delta f(x,y) \iff 0 = \Delta f + f. \tag{27}$$

b) Seien also f_k und g_k so definiert wie in der Aufgabenstellung. Wir verwenden im folgenden $(x,y) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$ für $\phi \in \mathbb{R}$ und Periodizität der Exponentialfunktion von imaginären Argumenten und von Sinus und Kosinus von reellen Argumenten. Es folgt für $k \in \mathbb{Z}$

$$g_k(x,y) = f_k(r)e^{ik\phi} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ik\phi}e^{-ik\alpha}f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\mathrm{d}\alpha$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik(\alpha-\phi)}f(r\cos\alpha, r\sin\alpha)\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{2\pi}\int_\phi^{2\pi+\phi} e^{-ik\vartheta}f(r\cos(\vartheta+\phi), r\sin(\vartheta+\phi))\mathrm{d}\vartheta$$
$$\overset{\text{Periodizität und Additionstheoreme}}{=} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}f(r\cos\vartheta\cos\phi - r\sin\vartheta\sin\phi, r\sin\vartheta\cos\phi + r\cos\vartheta\sin\phi)\mathrm{d}\vartheta$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}f(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta$$

Wir sollen außerdem punktweise $\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x,y) = f(x,y)$ zeigen. Für festes $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ definieren wir

$$h_{x,y} : S^1 \to \mathbb{C}, e^{i\vartheta} \mapsto f\left(x\mathrm{Re}\ e^{i\vartheta} - y\mathrm{Im}\ e^{i\vartheta}, x\mathrm{Im}\ e^{i\vartheta} + y\mathrm{Re}\ e^{i\vartheta}\right), \tag{28}$$

diese Funktion ist stetig und daher gilt die Parseval-Gleichung (mit $e_k(z) = z^k, z \in S^1$), bezüglich $\|\cdot\|_2$ und daher auch punktweise,

$$h_{x,y} = \sum_{k\in\mathbb{Z}}\langle e_k, h_{x,y}\rangle e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x,y)e_k. \tag{29}$$

In diese Gleichung setzen wir nun $1 = e^{i\cdot 0} \in S^1$ ein und erhalten

$$f(x,y) = h_{x,y}(1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x,y). \tag{30}$$

c) Wir setzen (30) in die Helmholtzgleichung ein und erhalten

$$\Delta\sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x,y) + \sum_{k\in\mathbb{Z}} g_k(x,y) = 0. \tag{31}$$

Im Folgenden verwenden wir Lemma 2.7 im Skript mehrfach. Das g_k definierende Integral geht über ein kompaktes Gebiet und der Integrand ist glatt (beliebig oft differenzierbar) in x und y, daher können auch Ableitungen höherer Ordnung in dieses Integral gezogen werden. Die Ableitung des Integranden nach x oder y kann mithilfe der Kettenregel in Terme der Form $(aD_1 + bD_2)f$, mit a, b unabhängig von x und y, umformuliert werden. Es folgt

$$\begin{aligned}
\Delta g_k &= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}f(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)f(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}((\cos\vartheta D_1 + \sin\vartheta D_2)^2 + (-\sin\vartheta D_1 + \cos\vartheta D_2)^2) \\
&\qquad\qquad f(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}(D_1^2 + D_2^2)f(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}(\Delta f)(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta \\
&\overset{\Delta f + f = 0}{=} -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\vartheta}f(x\cos\vartheta - y\sin\vartheta, x\sin\vartheta + y\cos\vartheta)\mathrm{d}\vartheta.
\end{aligned}$$

Damit gilt $\Delta g_k + g_k = 0$. Um diese Gleichung umzuformulieren verwenden wir Aufgabe H10.6 und die Darstellung von g_k durch f_k. Es gilt

$$0 = \Delta\left(f_k(r)e^{ik\phi}\right) + f_k(r)e^{ik\vartheta} = f_k(r)e^{ik\phi} + \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\right) f_k(r)e^{ik\phi} \tag{32}$$

$$= f_k(r)e^{ik\phi} + f_k''(r)e^{ik\phi} + \frac{1}{r}f_k'(r)e^{ik\phi} + \frac{-k^2}{r^2}f_k(r)e^{ik\phi}. \tag{33}$$

Hieraus folgt nach Multiplikation der Gleichung mit $r^2 e^{-ik\phi}$

$$0 = r^2 f_k''(r) + r f_k'(r) + (r^2 - k^2) f_k(r). \tag{34}$$

Für $f(x,y) = i^{-n}e^{ix}$ rechnen wir etwas länger. Wir verwenden dabei viele Dinge aus der Analysis 1. Beispielsweise, dass Reihe und Integral über ein kompaktes Gebiet vertauscht werden können wenn die Reihe absolut (und unabhängig vom Integrationsparameter) konvergiert. Es ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f_k(r) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-ik\phi} i^{-n} e^{ir\cos\phi}\mathrm{d}\phi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} i^{-n}e^{-ik\phi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ir\cos\phi)^l}{l!}\mathrm{d}\phi \\
&= i^{-n}\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ir)^l}{l!}\int_0^{2\pi} e^{-ik\phi}\cos^l\phi\mathrm{d}\phi = i^{-n}\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(ir)^l}{l!}\int_0^{2\pi} e^{-ik\phi}\frac{1}{2^l}\left(e^{i\phi}+e^{-i\phi}\right)^l\mathrm{d}\phi \\
&= i^{-n}\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}\frac{(ir)^l}{l!}\int_0^{2\pi} e^{-ik\phi}\sum_{c=0}^{l}\binom{l}{c}e^{i\phi c}e^{-i(l-c)\phi}\mathrm{d}\phi \\
&= i^{-n}\frac{1}{2\pi}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}\frac{(ir)^l}{l!}\sum_{c=0}^{l}\binom{l}{c}\int_0^{2\pi} e^{i\phi(2c-k-l)}\mathrm{d}\phi \\
&\overset{*}{=} i^{-n}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{1}{2^l}\frac{(ir)^l}{l!}\sum_{c=0}^{l}\binom{l}{c}\delta_{c,\frac{k+l}{2}}1_{l\in(2\mathbb{N}_0-k)\cap\mathbb{N}_0}1_{l\geq|k|} \\
&= i^{-n}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{ir}{2})\right)^l\frac{1}{l!}\binom{l}{\frac{k+l}{2}}1_{l\in(2\mathbb{N}_0-k)\cap\mathbb{N}_0}1_{l\geq|k|} \\
&= i^{-n}\sum_{b=0}^{\infty}\left(\frac{ir}{2}\right)^{|k|+2b}\frac{1}{(|k|+2b)!}\binom{|k|+2b}{\frac{k+|k|+2b}{2}} \\
&= i^{-n}\sum_{b=0}^{\infty}\left(\frac{ir}{2}\right)^{|k|+2b}\frac{1}{(|k|+2b)!}\binom{|k|+2b}{1_{k>0}k+b}
\end{aligned}$$

Bei der mit $*$ gekennzeichneten Gleichung haben wir verwendet, dass das auftretende Integral nur nicht verschwindet, wenn $0 \leq \frac{k+l}{2} \leq l$ gilt. □