

Lösung zur Hausaufgabe in Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Wir erinnern an die Darstellung des Binomialkoeffizienten aus der Analysis 1:

$$\binom{s}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (s - k).$$

Auf unseren Fall angewandt gibt das

$$\binom{n - \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (n - \frac{1}{2} - k).$$

Ordnet man das Produkt um erhält man

$$\binom{n - \frac{1}{2}}{n} = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (n - \frac{1}{2} - k) = \frac{1}{n!} \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} + k).$$

(a): Mit dieser Darstellung können wir jetzt sehr einfach die Monotonie zeigen:

$$\binom{n+1 - \frac{1}{2}}{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} \prod_{k=0}^n (\frac{1}{2} + k) = \frac{n + \frac{1}{2}}{n+1} \cdot \frac{1}{(n)!} \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (\frac{1}{2} + k) < \binom{n - \frac{1}{2}}{n}.$$

(b): Die erste Ungleichung ist klar, da $\binom{n - \frac{1}{2}}{n} > 0$, somit auch $a_n > 0 \forall n \in \mathbb{N}$, und $\pi = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Damit bleibt die zweite Ungleichung zu zeigen. Unter Verwendung von (a) rechnen wir

$$\begin{aligned} \pi - \sum_{n=0}^{m-1} a_n &= \sum_{n=m}^{\infty} \binom{n - \frac{1}{2}}{n} \frac{3}{4^n(2n+1)} \leq \sum_{n=m}^{\infty} \binom{m - \frac{1}{2}}{m} \frac{3}{4^n(2m+1)} \\ &= \binom{m - \frac{1}{2}}{m} \frac{3}{(2m+1)} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n}. \end{aligned}$$

In $\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n}$ erkennen wir eine Geometrische Reihe und wissen daher aus der Analysis 1:

- $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-1/4} = \frac{4}{3}$
- $\sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{4^n} = \frac{1-(1/4)^m}{1-1/4} = \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \frac{1}{4^m}$

Damit können wir die Reihe aus obiger Ungleichung lösen:

$$\sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} - \sum_{n=0}^{m-1} \frac{1}{4^n} = \frac{4}{3} - \left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3 \cdot 4^m} \right) = \frac{4}{3 \cdot 4^m}.$$

Nun setzen wir alles zusammen und erhalten

$$0 \leq \pi - \sum_{n=0}^{m-1} a_n \leq \binom{m - \frac{1}{2}}{m} \frac{3}{(2m+1)} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \binom{m - \frac{1}{2}}{m} \frac{3}{(2m+1)} \frac{4}{3 \cdot 4^m} = \frac{4}{3} a_m.$$

(c): Für $m = 4$ ist $\frac{4}{3}a_m = \frac{35}{73728} \approx 0,0004747$ und für $m = 5$ ist $\frac{4}{3}a_m = \frac{63}{720896} \approx 0,000087$.

Damit $\sum_{n=0}^4 a_n = \frac{10808809}{3440640} \approx 3,141511$. Im Vergleich dazu $\pi \approx 3,141592$.

Aufgabe 2

Seien im Folgenden $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n), z = (z_1, \dots, z_n) \in M$ beliebig. Aus

$$d(x, y) := \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, y_i)\} \geq d_j(x_j, y_j) \geq 0, \quad \forall 0 \leq j \leq n$$

folgt Positivität. Sind die d_i sogar Metriken gilt weiter

$$x = y \Leftrightarrow x_i = y_i, \quad \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow d_i(x_i, y_i) = 0, \quad \forall 1 \leq i \leq n \Leftrightarrow \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, y_i)\} = 0,$$

wobei im sich im letzten Schritt $\Leftarrow$ ergibt, weil $0 = \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, y_i)\} \geq d_j(x_j, y_j) \geq 0, \quad \forall 0 \leq j \leq n$ schon $d_j(x_j, y_j) = 0, \quad \forall 0 \leq j \leq n$ impliziert.

Symmetrie ergibt sich aus

$$d(x, y) = \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, y_i)\} = \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(y_i, x_i)\} = d(y, x).$$

Schließlich gilt es noch die Dreiecksungleichung zu verifizieren.

Dazu bemerken wir zunächst, dass für Teilmengen $A := \{a_1, \dots, a_n\}, B := \{b_1, \dots, b_n\} \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ gilt:

$$\max_{i=1, \dots, n} \{a_i + b_i\} \leq \max\{a : a \in A\} + \max\{b : b \in B\}.$$

Denn es existiert $k \leq n$, sodass $a_k + b_k = \max_{i=1, \dots, n} \{a_i + b_i\}$. Da $a_k \in A$ folgt auch $a_k \leq \max\{a : a \in A\}$ und ebenso $b_k \leq \max\{b : b \in B\}$. Es folgt nun

$$\begin{aligned} d(x, z) &= \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, z_i)\} \leq \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, y_i) + d_i(y_i, z_i)\} \\ &\leq \max_{i=1, \dots, n} \{d_i(x_i, y_i)\} + \max_{j=1, \dots, n} \{d_j(y_j, z_j)\} = d(x, y) + d(y, z). \end{aligned}$$

Aufgabe 3

(a): Zuerst entwickeln wir die Funktion $g_a(x) = \frac{1}{1-a \cos(x)}$ in eine Potenzreihe. Dafür kommt die geometrische Reihe in den Sinn.

$$g_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a \cos(x))^n$$

Diese konvergiert punktweise auf $] -1, 1[$ und gleichmäßig auf $] -\alpha, \alpha[$ für $\forall \alpha < 1$. Das bedeutet für uns, da $|a \cos(x)| \leq |a| < 1$ für $|a| < 1$ ist, dass die Partialsummen $\sum_{n=0}^{\infty} (a \cos(x))^n$ gleichmäßig in $x \in [0, 2\pi]$ gegen $g_a(x)$ konvergieren, solange $|a| < 1$.

Damit können wir auch Limes und Integral vertauschen und bekommen

$$\int_0^{2\pi} g_a(x) dx = \int_0^{2\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (a \cos(x))^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \int_0^{2\pi} \cos^n(x) dx.$$

Wir müssen nun abschließend folgendes Integral berechnen:

$$\int_0^{2\pi} \cos^n(x) dx.$$

Alternativ zur folgenden Methode kann dieses Integral auch mit partieller Integration gelöst werden.

$$2^n \cos^n(x) = (e^{ix} + e^{-ix})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{ix})^k (e^{-ix})^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{(2k-n)ix}$$

Unter Verwendung der binomischen Formel. Weiter wissen wir bereits (oder prüfen sehr einfach nach), dass

$$\int_0^{2\pi} e^{ilx} dx = \begin{cases} 2\pi, & l = 0 \\ 0, & l \neq 0 \end{cases}$$

Somit trägt höchstens ein Term der Summe zum Integral bei mit $k = \frac{n}{2}$ und n gerade. Insbesondere ist

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n-1}(x) dx = 0.$$

Zusammen ergibt dass

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) dx = \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}$$

Wenn wir das in obiges Integral einsetzen erhalten wir

$$\int_0^{2\pi} g_a(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \int_0^{2\pi} \cos^{2n}(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a^{2n} \frac{2\pi}{4^n} \binom{2n}{n}.$$

- (b): Euler-Substitution wird im Skript der Analysis 1 im Absatz 5.6.2 Unterpunkt 2 behandelt. Insbesondere ist Beispiel 5.29 sehr ähnlich zu dieser Aufgabe. Wir benutzen also die Substitution

$$] - \pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto t = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

mit Umkehrtransformationen

$$\cos \alpha = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}, \quad \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2}{1 + t^2}.$$

Damit berechnen wir

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{1}{1 - a \cos(x)} dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{1 - a \cos(x)} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 - a \frac{1-t^2}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{1+t^2 - a(1-t^2)} dx \\ &= \frac{2}{1-a} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} t\right)^2} dx = \frac{2}{1-a} \left[\sqrt{\frac{1-a}{1+a}} \arctan \left(\sqrt{\frac{1+a}{1-a}} t \right) \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}} = 2\pi(1-a^2)^{-1/2} \end{aligned}$$

$(1-x)^s$ können wir für $x \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{C}$ mit Hilfe der Binomischen Reihe berechnen (von der wir wissen, dass sie für $|x| < 1$ konvergiert). Somit haben wir

$$2\pi(1-a^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} 2\pi \binom{-1/2}{n} (-a^2)^n$$

Zum Konsistenzcheck müssen wir überprüfen ob beide Potenzreihen übereinstimmen. Dies machen wir indem wir deren Koeffizienten vergleichen. Somit bleibt für alle $n \in \mathbb{N}$ zu zeigen

$$(-1)^n \binom{-1/2}{n} = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n}$$

oder wie Aufgabe 1 (b) aus der Nachklausur von Analysis 1

$$\binom{2n}{n} = (-4)^n \binom{-1/2}{n}.$$

Den Beweis hierfür findet man hier, bzw. in der Lösung für die Nachklausur auf der Analysis 1 Homepage (ganz oben auf der Analysis 2 Homepage verlinkt).

Aufgabe 4

$\|f\| : x \mapsto \|f(x)\|$ ist eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. ($f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$). Wir zeigen dessen Stetigkeit in $x \in \mathbb{R}$, d.h.

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, sodass für alle y mit $|x - y| < \delta$ gilt: $|\|f(x)\| - \|f(y)\|| < \varepsilon$.

Sei also $\varepsilon > 0$. Weil jede Komponente $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig ist, gibt es für alle $i = 1, \dots, n$ ein $\delta_i > 0$, sodass für alle y mit

$$|x - y| < \delta_i \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \epsilon.$$

Setze $\delta = \min_{i=1, \dots, n} \{\delta_i\}$. Damit erreichen wir, dass jede Komponente betragsmäßig klein ist. Dies müssen wir jetzt auch noch für die Norm von f erreichen. Setze dazu

$$M := \max \left(\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\|, \dots, \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \right) = \max_{i=1, \dots, n} (\|e_i\|)$$

wobei e_i der i -te Einheitsvektor ist. Mit der Dreiecksungleichung und Linearität der Norm folgt für y mit $|x - y| < \delta$

$$\begin{aligned} \|f(x) - f(y)\| &= \left\| \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(y) \\ f_2(x) - f_2(y) \\ \vdots \\ f_n(x) - f_n(y) \end{pmatrix} \right\| \\ &\stackrel{\Delta\text{-Ungl.}}{\leq} \left\| \begin{pmatrix} f_1(x) - f_1(y) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ f_2(x) - f_2(y) \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \dots + \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ f_n(x) - f_n(y) \end{pmatrix} \right\| \\ &\stackrel{\text{Linearität}}{=} |f_1(x) - f_1(y)| \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + |f_2(x) - f_2(y)| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| + \dots + |f_n(x) - f_n(y)| \left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \right\| \\ &= \sum_{i=1}^n \underbrace{|f_i(x) - f_i(y)|}_{\leq \varepsilon} \underbrace{\|e_i\|}_{\leq M} \leq n \cdot M \cdot \varepsilon \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen, dass

$$\|f(x) - f(y)\| \geq |\|f(x)\| - \|f(y)\||.$$

Die folgt aber sofort aus der Dreiecksungleichung. Somit können wir nun unsere Ergebnisse zusammensetzen.

$$|x - y| < \delta (< \delta_i \forall i = 1, \dots, n) \Rightarrow |\|f(x)\| - \|f(y)\|| \leq \|f(x) - f(y)\| \leq n \cdot M \cdot \varepsilon.$$

Dies zeigt die Stetigkeit von $\|f\|$. Für Ergebniskosmetik hätte man auch mit $\tilde{\varepsilon} := \frac{\varepsilon}{n \cdot M}$ beginnen können, das macht jedoch keinen Unterschied, da n und M konstant sind. Nun zum Integral. Sei (analog zu vorhin) $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$, sodass $\forall i = 1, \dots, n$

$$|x - y| < \delta \Rightarrow |f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon.$$

Dann ist für alle i

$$(b-a)\varepsilon > \left| \int_a^b f(x) \, dx - \underbrace{\sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right)}_{(\star)} \right|$$

Wobei n so zu wählen ist, dass $\frac{b-a}{n} < \delta$. Für die Treppenfunktion $(\star)$ greift die herkömmliche Dreiecksungleichung

$$\left\| \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\| \leq \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\|.$$

Lässt man nun $\varepsilon \rightarrow 0$, d.h. $n \rightarrow \infty$, gehen, so folgt mittels anfangs gezeigter Stetigkeit von $\|f\|$ die Behauptung

$$\begin{aligned} \left\| \int_a^b f(x) \, dx \right\| &= \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\| \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{b-a}{n} \left\| f\left(a + \frac{k}{n}(b-a)\right) \right\| = \int_a^b \|f(x)\| \, dx. \end{aligned}$$