Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Nach Aufgabe 1.136 ist $\sqrt{2}$ ein Fixpunkt der folgenden Funktion

$$f : [\sqrt{2}, \infty] \to [\sqrt{2}, \infty], \qquad f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x} + x\right).$$

Beginnen wir mit $x_0 = 2$. Damit ist $x_1 = f(x_0) = f(2) = \frac{3}{2}, x_2 = f(x_1) = 1,416666$ und $x_3 = f(x_2) = 1,4142156$.
Die a-priori und a-posteriori-Schranken bekommen wir aus den Ungleichungen (18) und (19) im Banachschen Fixpunktsatz.
a-priori-Schranke:

$$|x_1 - \sqrt{2}| \le \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}|x_1 - x_0| = \frac{1}{2};$$

$$|x_2 - \sqrt{2}| \le \frac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}|x_1 - x_0| = \frac{1}{4};$$

$$|x_3 - \sqrt{2}| \le \frac{\frac{1}{2^3}}{1-\frac{1}{2}}|x_1 - x_0| = \frac{1}{8}.$$

a-posteriori-Schranke:

$$|x_1 - \sqrt{2}| \le \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}|x_1 - x_0| = \frac{1}{2};$$

$$|x_2 - \sqrt{2}| \le |x_1 - x_2| = 0,08333;$$

$$|x_3 - \sqrt{2}| \le |x_2 - x_3| = 0,00245.$$

Die tatsächlichen Fehler sind:

$$|x_1 - \sqrt{2}| = 0,0857864;$$

$$|x_2 - \sqrt{2}| = 0,00245;$$

$$|x_3 - \sqrt{2}| = 0,00000203.$$

Aufgabe 2

Wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, f(x) = Ax + b$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eine Kontraktion ist. Dazu berechnen wir

$$d(f(x), f(y)) = |Ax + b - (Ay + b)| = |A(x - y)| \le \|A\||x - y|$$

nach der Definition der Operatornorm. Wobei mit Aufgabe H5.3 gilt

$$\|A\| < \sqrt{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{k,l}^2} < 1.$$

Somit hat f nach dem Banachschen Fixpunktsatz einen eindeutigen Fixpunkt, d.h. die Gleichung

$$x = Ax + b$$

hat genau eine Lösung für alle $b \in \mathbb{R}^n$. Insbesondere hat auch

$$x = Ax + b \Leftrightarrow x - Ax = b \Leftrightarrow Idx - Ax = b \Leftrightarrow (Id - A)x = b$$

für alle $b \in \mathbb{R}^n$ eine Lösung. Das bedeutet aber, dass die Matrix $Id - A$ vollen Rang hat, da $b \in \text{Bild}(Id - A)$ für alle $b \in \mathbb{R}^n$ gilt, also $\text{Bild}(Id - A) = \mathbb{R}^n$. Folglich ist $Id - A$ invertierbar.

Aufgabe 3

(a) Wir berechnen σ_j^k für $j = 1, 2, 3, k \in \mathbb{N}$ direkt.

$$\sigma_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_2^2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\sigma_3^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also $\sigma_j^{(2k)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\sigma_j^{(2k+1)} = \sigma_j$ für $j = 1, 2, 3, k \in \mathbb{N}$.
Aus

$$\begin{aligned}
\exp(it\sigma_j) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\sigma_j)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\sigma_j)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\sigma_j)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k}}{(2k)!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^{2k+1}}{(2k+1)!} \sigma_j \\
&= \cos(t) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + i\sin(t)\sigma_j
\end{aligned}$$

folgt

$$\exp(it\sigma_1) = \begin{pmatrix} \cos(t) & i\sin(t) \\ i\sin(t) & cos(t) \end{pmatrix};$$

$$\exp(it\sigma_2) = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix};$$

$$\exp(it\sigma_3) = \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - i\sin(t) \end{pmatrix}.$$

(b) Für $j = 1, 2$ ist die Diagonalform von $\sigma_j = T_j \circ \sigma_3 \circ T_j^{-1}$, für $T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $T_1^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ und $T_2 = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $T_2^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$. Des weiteren folgt aus $\sigma_j^k = T_j \circ \sigma_3^k \circ T_j^{-1}$ für $k \in \mathbb{N}, j = 1, 2$ schon $\exp(it\sigma_j) = T_j \exp(it\sigma_3) T_j^{-1}$ für $j = 1, 2$. Mit diesen Informationen überprüfen wir nun die Ergebnisse aus Teil (a).

$$\begin{aligned}
\exp(it\sigma_1) &= T_1 \exp(it\sigma_3) T_1^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - i\sin(t) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) & \cos(t) - i\sin(t) \\ \cos(t) + i\sin(t) & -\cos(t) + i\sin(t) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(t) & 2i\sin(t) \\ 2i\sin(t) & 2\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & i\sin(t) \\ i\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\exp(it\sigma_2) &= T_2 \exp(it\sigma_3) T_2^{-1} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) & 0 \\ 0 & \cos(t) - i\sin(t) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(t) + i\sin(t) & i\cos(t) + \sin(t) \\ i\cos(t) - \sin(t) & \cos(t) - i\sin(t) \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2\cos(t) & 2\sin(t) \\ -2\sin(t) & 2\cos(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) & \sin(t) \\ -\sin(t) & \cos(t) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir folgen der rekursiven Folge und beginnen mit $x_0 = 2 = 2_5$. Dann ist

$$x_1 = f(x_0) = f(2_5) = 2_5^2 + 2_5 + 1_5 = 12_5$$

(Zum Vergleich im Dezimalsystem: $f(2) = 2^2 + 2 + 1 = 2 + 5 = 12_5$). Weiter ist

$$x_2 = f(x_1) = f(12_5) = (12_5)^2 + 12_5 + 1_5 = 144_5 + 12_5 + 1_5 = 212_5$$

(Zum Vergleich: $f(2+5) = (2+5)^2 + 2 + 5 + 1 = 2^2 + 2 \cdot 2 \cdot 5 + 5^2 + 3 + 5 = 2 + 5 + 2 \cdot 5^2 = 212_5$) und

$$x_3 = f(x_2) = (212_5)^2 + 212_5 + 1_5 = 101212_5.$$

(Zum Vergleich: $f(2+5+2\cdot5^2) = (2+5+2\cdot5^2)^2 + 2 + 5 + 2\cdot5^2 + 1 = 2+5+2\cdot5^2+5^3+5^5 = 101212_5$). Um diese Zahlen mit der 5-adischen Darstellung von i zu vergleichen berechnen wir diese konkret. Zuerst bemerken wir, dass

$$-1 = \sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot 5^k,$$

da $d_5\left(-1, \sum_{k=0}^{n} 4 \cdot 5^k\right) = 5^{-n} \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Um die Wurzel von -1 zu berechnen betrachten wir folgende Gleichung für $i = \sum_{k=0}^{\infty} i_k \cdot 5^k \in 2 + 5\mathbb{Z}_5$ (da i Fixpunkt der Funktion $f : 2 + 5\mathbb{Z}_5 \to 2 + 5\mathbb{Z}_5$)

$$\sum_{k=0}^{\infty} 4 \cdot 5^k = -1 = i^2 = \left(\sum_{k=0}^{\infty} i_k \cdot 5^k\right)^2 = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} i_k \cdot i_l \cdot 5^{k+l}.$$

Durch Koeffizientenvergleich bekommen wir folgende Gleichungen:

- i_0: $i_0^2 = 4 \mod 5$ hat die Lösungen $i_0 = 2, 3$. Für den Fall $i_0 = 3$ ist $i \notin 2 + 5\mathbb{Z}_5$. Somit ist $i_0 = 2$.
- i_1: $2 \cdot i_0 \cdot i_1 = 4 \mod 5 \Leftrightarrow 4 \cdot i_1 = 4 \mod 5$ hat die Lösung $i_1 = 1$.
- i_2: $2 \cdot i_0 \cdot i_2 + i_1^2 = 4 \mod 5 \Leftrightarrow 4 \cdot i_2 = 3 \mod 5$ hat die Lösung $i_2 = 2$. Hier ist beachtenswert, da $2 \cdot i_0 \cdot i_2 = 8$ bekommen wir einen Übertrag von 1 für i_3.
- i_3 : $2 \cdot i_0 \cdot i_3 + 2 \cdot i_1 \cdot i_2 = 3 \mod 5 \Leftrightarrow 4 \cdot i_3 + 4 = 3 \mod 5$ hat die Lösung $i_3 = 1$.

Somit können wir unsere Ergebnisse gegenüberstellen

	$x_{0,k}$	$x_{1,k}$	$x_{2,k}$	$x_{3,k}$	i_k
$k = 0$	2	2	2	2	2
$k = 1$		1	1	1	1
$k = 2$			2	2	2
$k = 3$				1	1