Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Häufiges iterieren des in der Aufganbenstellung beschriebenen Vorgangs führt zu dem Wert 0.73908513321516. Dieser Wert ist unabhängig vom Startwert, weil der Cosinus eine Kontraktion ist. Das gilt, denn seine Ableitung ist auf dem relevanten Intervall beschränkt durch eine Zahl kleiner als 1 ($\sup_{x\in[-1,1]} |cos'(x)| = sin(1) < 1$) (Siehe Skript). Ich beschränke mich auf das Intervall $[-1, 1]$, weil nach der ersten Iteration keine anderen Werte mehr vorkommen.

Aufgabe 2

Wir teilen den Beweis auf in zwei Teile.

1) $\overline{\leq_{\mathbb{Q}}} \subseteq \leq_{\mathbb{R}}$: Es sei $(x, y) \in \overline{\leq_{\mathbb{Q}}} \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ und ε gegeben. Wähle $(a, b) \in U_\varepsilon(x, y) \cap \leq_{\mathbb{Q}} \subseteq \mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, dann gilt
$$x \leq a + \varepsilon \leq b + \varepsilon \leq y + 2\varepsilon. \tag{1}$$
Es folgt also $\forall\varepsilon > 0 : x - y \leq 2\varepsilon$ und damit auch
$$x - y \leq \inf_{\varepsilon>0} 2\varepsilon = 0. \tag{2}$$
Damit gilt also $x \leq_{\mathbb{R}} y$, was zu zeigen war.

2) $\leq_{\mathbb{R}} \subseteq \overline{\leq_{\mathbb{Q}}}$: Es sei $(x, y) \in \leq_{\mathbb{R}}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wähle aufgrund der Dichtheit von $\mathbb{Q}$, $a \in \left]x - \frac{\varepsilon}{3}, x\right[$ und $b \in \left]y, y + \frac{\varepsilon}{3}\right[$. Dann folgt
$$a \leq x \leq y \leq b \wedge \|(x - a, y - b)\| \leq \|(x - a, 0)\| + \|(0, y - b)\| < \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon, \tag{3}$$
also haben wir für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ ein Element von $U_\varepsilon(x, y) \cap \leq_{\mathbb{Q}}$ gefunden. Damit folgt $(x, y) \in \overline{\leq_{\mathbb{Q}}}$. $\square$

Aufgabe 3

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $f \in (C([a, b], \mathbb{K}), \|\cdot\|_2)$ und M wie in der Aufgabenstellung gegeben.

a) Wir zeigen zuerst, dass M dicht in $C([a, b], \mathbb{K})$ dicht liegt. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil $(C([a, b], \mathbb{K}) \subseteq \mathcal{R}([a, b], \mathbb{K})$(Riemann-integrierbare Funktionen) gilt, wähle $a < a_f$ und $b_f < b$ mit
$$\int_a^{a_f} \|f(x)\|^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{4} \wedge \int_{b_f}^{b} \|f(x)\|^2 \mathrm{d}x < \frac{\varepsilon^2}{4}. \tag{4}$$
Es folgt, dass
$$f_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{K}$$
$$x \mapsto \begin{cases} \frac{x-a}{a_f-a} f(x) & \text{für } a \leq x \leq a_f \\ f(x) & \text{für } a_f \leq x \leq b_f \\ \frac{b-x}{b-b_f} f(x) & \text{für } b_f \leq x \leq b \end{cases}$$

folgende Eigenschaft hat: $f_\varepsilon \in U_\varepsilon(f) \cap M$. Dies sieht man so: zum einen gilt $f_\varepsilon(a) = 0 = f_\varepsilon(b)$ und zum anderen gilt für den Abstand zwischen f_ε und f:

$$\|f - f_\varepsilon\|_2 = \sqrt{\int_a^{a_f} |f(x)|^2 \frac{(a_f - x)^2}{(a_f - a)^2} \mathrm{d}x + \int_{b_f}^b |f(x)|^2 \frac{(x - b_f)^2}{(b - b_f)^2} \mathrm{d}x} \tag{5}$$

$$\leq \sqrt{\sup_{x \in [a, a_f]} \frac{(a_f - x)^2}{(a_f - a)^2} \int_a^{a_f} |f(x)|^2 \mathrm{d}x + \sup_{x \in [b_f, b]} \frac{(x - b_f)^2}{(b - b_f)^2} \int_{b_f}^b |f(x)|^2 \mathrm{d}x} \tag{6}$$

$$< \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{4} + \frac{\varepsilon^2}{4}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} < \varepsilon. \tag{7}$$

b) Der Raum $L^2([a,b], \mathbb{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist die Verfollständigung von $C([a,b], \mathbb{K})$ (Siehe Definition in Beispiel 1.123 im Skript) bezüglich der durch $\langle\cdot,\cdot\rangle$ induzierten Metrik. Nun ist nach a), M dicht in $C([a,b], \mathbb{K})$. Sei also $f \in L^2([a,b], \mathbb{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Weil $C([a,b], \mathbb{K})$ dicht in $L^2([a,b], \mathbb{K}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ist wählen wir $f' \in C([a,b], \mathbb{K})$ mit $\|f - f'\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ und weil M dicht in $C([a,b], \mathbb{K})$ ist finden wir $f'' \in M$ mit $\|f'' - f'\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$. Insgesamt gilt dann

$$\|f - f''\|_2 \leq \|f - f'\|_2 + \|f' - f''\|_2 < \varepsilon. \tag{8}$$

□

Aufgabe 4

a) Es seien $(M, \mathcal{T}_M)$, $(N, \mathcal{T}_N)$, f, g und A wie in der Aufgabenstellung. Seien $x \in M$ und $f(x) \in U \in \mathcal{T}_N$ und $g(x) \in W \in \mathcal{T}_N$ beliebig gegeben. Dann sind $f^{-1}[U]$ und $g^{-1}[W]$ offene Umgebungen von x, deshalb ist auch $f^{-1}[U] \cap g^{-1}[W]$ eine offene Umgebung von x. Wähle nun $a \in f^{-1}[U] \cap g^{-1}[W] \cap A$, dann gilt einerseits $f(a) \in U$ und andererseits $f(a) = g(a) \in W$. Insgesamt ist $W \cap U \neq \emptyset$. Insgesamt gilt also

$$\forall x \in M, \forall U, W \in \mathcal{T}_N : (f(x) \in U \wedge g(x) \in W) \Rightarrow U \cap W \neq \emptyset. \tag{9}$$

Weil $(N, \mathcal{T}_N)$ ein Hausdorffraum ist gilt

$$\forall y \neq z \in N : \exists U, W \in \mathcal{T}_N : z \in U \wedge y \in W \wedge U \cap W = \emptyset. \tag{10}$$

Damit muss aber für alle $x \in M$, $f(x) = g(x)$ gelten.

b) Seien $M, \mathcal{T}_M$, f, g und A wie in der Aufgabenstellung. Die Abbildung $f - g$ ist stetig, weil $-\mathbb{1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto -x$, f, g, die Komposition von stetigen Abbildungen stetig (Lemma 1.54) und die Addition ebenfalls stetig ist (Lemma 1.62). Entgegen des tipps betrachten wir nun $B := (f - g)^{-1}\left[]0, \infty[\right] \subseteq M$, diese Menge muss offen sein, weil es das Urbild einer offenen Menge ist. Weil $A \subseteq M$ dicht in M ist gilt daher entweder $B = \emptyset$ oder $B \cap A \neq \emptyset$. Der zweite Fall ist jedoch widersprüchlich, weil für alle Elemente y von B : $f(y) - g(y) > 0$ gilt, während für Elemente z von A : $f(y) \leq g(y)$ gilt. Es folgt also $B = \emptyset$, also folgt auch $f \leq g$.

Aufgabe 5

Sei $p \in \mathbb{N}$ eine Primzahl.

a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge mit Werten in $\{0, \ldots, p-1\}$. Wir betrachten die Folge

$$(b_n)_{n \in \mathbb{N}_0} = \left(\sum_{k=0}^n a_k p^k \right)_{n \in \mathbb{N}_0}. \tag{11}$$

Behauptung. *Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist eine Cauchyfolge*

Beweis: Sei $\varepsilon > 0$ gegeben und $m \in \mathbb{N}$ so groß, dass $p^{-m} < \varepsilon$ gilt. Dann gilt für alle $n \geq n' > m$:

$$d_p(b_n, b_{n'}) = d_p\left(\sum_{k=n'+1}^{n} a_k p^k, 0\right) = d_p\left(p^{n'}\sum_{k=+1}^{n-n'} a_{n'+k}p^k, 0\right) \leq p^{-n'} < \varepsilon. \tag{12}$$

Dabei wurde ausgenutzt, dass für alle $x, y, z \in \mathbb{Z}_p$: $d(x, y) = d(x + z, y + z)$ gilt und die Vielfachheit von $p^{n'}\sum_{k=+1}^{n-n'} a_{n'+k}p^k$ bezüglich p mindestens n' ist.

Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist und $\mathbb{Z}_p$ vollständig ist konvergiert diese in $(\mathbb{Z}_p, d_p)$.

b) Sei j wie in er Aufgabenstellung. Wir zeigen zuerst, dass sich Modulo Rechnung auf $\mathbb{Z}_p$ erweitern lässt. Zuerst erweitern wir es auf $\mathbb{Z}$, für alle $Z \in \mathbb{N}$ wird für jedes $0 \neq r \in \mathbb{Z}$ definiert $-Z\text{mod } r := r - Z\text{mod } r$. Wir erweitern Modulo Rechnung nur bezüglich p^n für $n \in \mathbb{N}$. Nach der Vorlesung reicht es zu zeigen, dass für alle natürlichen n die Funktion $\cdot\text{mod } p^n$ gleichmäßig stetig ist. Seit dafür $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = p^{-n}$, dann gilt für alle $x, y \in \mathbb{Z}$:

$$d_p(x, y) < p^{-n} \Rightarrow \exists z \in \mathbb{Z} : |x - y| = zp^n. \tag{13}$$

Also gibt es auch ein $z' \in \mathbb{Z}$ mit $x - y = z'p^n$, also gilt auch $(x - y)\text{mod } p^n = 0 < \varepsilon$. Damit ist mod p^n für jedes $n \in \mathbb{N}$ erweiteibar auf $\mathbb{Z}_p$. Davon werden wir in dieser Lösung exzessiv gebrauch machen.

Wir zeigen zuerst Injektivität, dabei hilft die folgende Behauptung.

Behauptung. *Seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \in \{0, \ldots, p-1\}^{\mathbb{N}_0}$ gegeben, die nicht identisch sind. Wähle dann $n := \min\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \neq b_n\}$, dann folgt:*

$$d_p(j((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}), j((b_k)_{k\in\mathbb{N}_0})) = p^{-n}. \tag{14}$$

Beweis: Wir zeigen dies durch den induktiven Beweis folgender Aussage. Für alle $N \geq n$ gilt

$$d_p\left(\sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)p^k, 0\right) = p^{-n}. \tag{15}$$

Sei $N = n$ dann gilt $d_p\left(\sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)p^k, 0\right) = d_p((a_n - b_n)p^n, 0) = p^{-n}$, weil $a_n - b_n \in p^n\{-p+1, \ldots, -1, 1, p-1\}$. Sei für den Induktionsschritt (15) für $N > n$ erfüllt. Dann gilt nach Induktionsvoraussetzung

$$\sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)p^k\text{mod } p^n = 0 \wedge \sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)p^k\text{mod } p^{n+1} \neq 0. \tag{16}$$

Hinzufügen des nächsten Summanden, $(a_{N+1} - b_{N+1})p^{N+1}$, ändert daran nichts, denn es gilt

$$(a_{N+1} - b_{N+1})p^{N+1}\text{mod } p^n = 0 \wedge (a_{N+1} - b_{N+1})p^{N+1}\text{mod } p^{n+1} = 0. \tag{17}$$

Das beendet den Induktionsbeweis. Die Behauptung folgt dann mit der Stetigkeit von d_p, es gilt

$$p^{-n} = \lim_{N\to\infty} d_p\left(\sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)p^k, 0)\right) = d_p\left(\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}(a_k - b_k)p^k, 0)\right) \tag{18}$$

$$= d_p\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}(a_k - b_k)p^k, 0)\right) = d_p\left(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_k p^k, \sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k p^k)\right) \tag{19}$$

$$= d_p(j((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}), j((b_k)_{k\in\mathbb{N}_0})). \tag{20}$$

Insbesondere ist also $d_p(j((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}), j((b_k)_{k\in\mathbb{N}_0})) \neq 0$ erfüllt und damit auch $j((a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}) \neq j((b_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$. Nun zeigen wir Surjektivität, sei dafür $x \in \mathbb{Z}_p$ gegeben.. Es gilt folgendes

Behauptung. *Für jedes $N \in \mathbb{N}_0$ gibt es eine Folge $(a_k^N)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \{0,\dots,N-1\}^{\mathbb{N}_0}$ mit $a_k^N = 0$ für alle $k > N$ und $d_p\left(x, j\left((a_k^N)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)\right) \leq p^{-N}$.*

Beweis: Für $N = 0$ ist die Aussage klar, weil $d_p(\cdot,\cdot) \leq 1$ gilt. Sei daher für den Induktionsschritt ein $N \in \mathbb{N}_0$ gegeben, für welches die Induktionsvorrausetzung gilt. Wir haben also eine Folge mit $(a_k^N)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \{0,\dots,p-1\}^{\mathbb{N}_0}$ mit $a_k^N = 0$ für alle $k > N$ und $d_p\left(x, j\left((a_k^N)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)\right) \leq p^{-N}$. Wir definieren $R_N := x - j\left((a_k^N)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)$, dieses erfüllt

$$R_N \bmod p^N = 0. \tag{21}$$

Falls $R_N \bmod p^{N+1} = 0$ ebenfalls erfüllt ist gibt es nichts mehr zu zeigen, wir nehmen also $T := R_N \bmod p^{N+1} \geq 1$ an. Es folgt $(R_N + (p-T)p^N) \bmod p^{N+1} = 0$, also wählen wir $a_{N+1}^{N+1} = p - T$. Zudem wählen wir $a_k^{N+1} = a_k^N$ für $k \neq N+1$. So folgt insgesamt

$$\left|x - j\left((a_k^{N+1})_{k\in\mathbb{N}_0}\right)\right| \bmod p^{N+1} = 0 \tag{22}$$

und damit $d_p\left(x, j\left((a_k^{N+1})_{k\in\mathbb{N}_0}\right)\right) \leq p^{-(N+1)}$. Die durch die 2. Behauptung erzeugten Folgen lassen sich für $N \to \infty$ zu einer Grenzfolge fortsetzen. Das Bild dieser Grenzfolge unter j hat Abstand 0 zu x aufgrund der Stetigkeit von d_p und der in Teilaufgabe a) gezeigten Konvergenz, ist also identisch mit x. Damit ist j surjektiv, also auch bijektiv. $\square$