Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

(a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge. Dann gilt

$$\forall\ \varepsilon\ \exists\ n \in \mathbb{N}\ \forall\ k \geq n\ \forall\ l \geq n : d(a_k, a_l) < \varepsilon.$$

Angenommen $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geq n} d(a_n, a_m) = a > 0$. Dann existiert eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ für die ein $K \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $k \geq K$, $\sup\limits_{m\geq k} d(a_{n_k}, a_{n_m}) > \frac{a}{2}$. Damit kann es aber für $\varepsilon = \frac{a}{4}$ kein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $\forall\ l \geq N$ und $\forall\ k \geq N : d(a_l, a_k) < \frac{a}{4}$. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge was ein Widerspruch ist.

Sei nun $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{m\geq n} d(a_n, a_m) = 0$. Da $d(a, b) \geq 0$ für alle $a, b \in M$ ist hier der $\limsup$ ein $\lim$, somit haben wir

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N : \sup_{m\geq n} d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Da $d(a_n, a_m) \leq \sup\limits_{m\geq n} d(a_n, a_m)\ \forall\ m \geq n$ folgt schon

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N \in \mathbb{N}\ \forall\ n \geq N\ \forall\ m \geq N : d(a_n, a_m) \leq \sup_{m\geq n} d(a_n, a_m) < \varepsilon.$$

Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge.

(b) Wir zeigen, dass $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (N, d') ist. Da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in (M, d) ist gilt

$$\forall\ \delta > 0\ \exists\ m \in \mathbb{N}\ \forall\ p \geq m\ \forall\ q \geq m : d(a_p, a_q) < \delta.$$

Weiter gilt, da f gleichmäßig stetig ist:

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ \delta > 0\ \forall\ x, y \in M : (d(x, y) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Sei also $\varepsilon > 0$, wir müssen ein $N \in \mathbb{N}$ finden, sodass für alle $k, l > N, d'(f(a_l), f(a_k)) < \varepsilon$ gilt. Da f gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta_\varepsilon > 0$, sodass $\forall\ x, y \in M$ aus $d(x, y) < \delta_\varepsilon$ schon $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$ folgt $(\star)$. Weiter folgt, da $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, dass es ein $N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}$ gibt, sodass $d(a_n, a_m) < \delta_\varepsilon$ für alle $n, m \geq N_{\delta_\varepsilon}$ ist. Somit ist mit $(\star)$ nun auch $d'(f(a_n), f(a_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N_{\delta_\varepsilon}$. Setzen wir nun zusammen:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\ N_{\delta_\varepsilon} \in \mathbb{N}\ \forall k, l \geq N_{\delta_\varepsilon} d'(f(a_l), f(a_k)) < \varepsilon.$$

Aufgabe 2

(a) Wir führen diese Aussage auf die Definition der Stetigkeit: „Urbilder offener Mengen sind offen" zurück. Dabei verwenden wir, dass wir Urbilder und Komplemente vertauschen dürfen.
Sei f stetig und $A \subseteq N$ abgeschlossen, also $A^c \in \mathcal{T}_N$. Damit folgt $f^{-1}(A)^c = f^{-1}(A^c) \in$

$\mathcal{T}_M$ und damit ist $f^{-1}(A)$ abgeschlossen.
Sei nun $A \subseteq N$ eine offene Menge und $f : M \to N$ eine Funktion mit der Eigenschaft, dass $f^{-1}(B)$ abgeschlossen ist für alle abgeschlossenen $B \subseteq N$. Da A offen ist, ist A^c abgeschlossen. Somit ist $f^{-1}(A^c)$ abgeschlossen und $f^{-1}(A^c)^c = f^{-1}(A)$ offen. Es also das Urbild unter f einer beliebigen offenen Menge offen, d.h. f ist stetig.

Aufgabe 3

Die Äquivalenz von (a) und (c) folgt unmittelbar aus Lemma 1.63 der Vorlesung, da die Identität auf offensichtliche Weise linear ist. Die Äquivalenz von (a) und (b) ist ersichtlich aus der Definition der Stetigkeit:

$$\text{id stetig } \Leftrightarrow \ \forall\ B \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} : \ \text{id}^{-1}(B) = B \in \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A} \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A}.$$

Mit diesen Äquivalenzen sehen wir nun leicht, dass

$$\exists\ c \geq 0\ \forall\ x \in V : c\|x\|_A \leq \|x\|_B \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B}$$

und

$$\exists\ C \geq 0\ \forall\ x \in V : \|x\|_B \leq C\|x\|_A \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B} \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A}.$$

Zusammen ergibt dass

$$\exists\ c, C \geq 0\ \forall\ x \in V : c\|x\|_A \leq \|x\|_B \leq C\|x\|_A \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\|\cdot\|_A} = \mathcal{T}_{\|\cdot\|_B}.$$

Aufgabe 4

(a) Sei $\varepsilon > 0$ und $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in M$ mit $d(x, y) < \varepsilon$. Dann gilt $\varepsilon > d(x, y) \geq d_i(x_i, y_i) = d_i(f(x), f(y))$ für alle $1 \leq i \leq n$. Somit sind die kanonischen Projektionen gleichmäßig stetig.

(b) Sei $y, z \in M_i$ mit $d_i(y, z) = \varepsilon$. Dann ist $d_j((g_i(y))_j, (g_i(z))_j) = d_j(x_j, x_j) = 0$ für alle $j \neq i$. Somit erhalten wir

$$d(g_i(y), g_i(z)) = \max_{1 \leq j \leq n} \{d_j((g_i(xy))_j, (g_i(z))_j)\} = d_i((g_i(y))_i, (g_i(z))_i) = d_i(y, z) = \varepsilon.$$

Die Inklusionsabbildungen g_i sind folglich für alle $1 \leq i \leq n$ isometrisch und somit gleichmäßig stetig.

Aufgabe 5

Sei $x \in \mathbb{K}^n$ und j fest mit $|x_j| := \max\{|x_i| 1 \leq i \leq n\} =: \|x\|_\infty$. Dann gilt $|x_j|^p \geq |x_i|^p$ für alle $p \geq 0, 0 \leq i \leq n$ und weiter

$$|x_j|^p \leq \sum_{i=1}^n |x_i|^p \leq n|x_j|^p.$$

Da die Wurzelfunktion auf $\mathbb{R}_+$ monoton steigend ist, folgt weiter

$$\|x\|_\infty = (|x_j|^p)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq n^{\frac{1}{p}}|x_j| = n^{\frac{1}{p}}\|x_j\|_\infty \leq n\|x\|_\infty.$$

Somit haben wir für alle $p \geq 0$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq n\|x\|_\infty.$$

Weiter folgt für $q \geq p$ sofort aus $|x_i|/\|x\|_p \leq |x_i|/\|x\|_\infty \leq 1,\ \forall\ 1 \leq i \leq n :$

$$\frac{\|x\|_q}{\|x\|_p} = \left(\sum_{i=1}^n \left|\underbrace{\frac{|x_i|}{\|x\|_p}}_{\leq 1}\right|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leq \left(\sum_{i=1}^n \left|\frac{|x_i|}{\|x\|_p}\right|^p\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\frac{\|x\|_p^p}{\|x\|_p^p}\right)^{\frac{1}{q}} = 1.$$