Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Sei $x \in M$ und $r > 0$ beliebig gegeben.

1) Wir zeigen zuerst, dass $B_r^d(x)$ abgeschlossen ist. Das ist das Gleiche wie zu zeigen, dass $\left(B_r^d(x)\right)^c$ offen ist. Es gilt

$$\left(B_r^d(x)\right)^c := \{y \in M \mid d(x,y) > r\}. \tag{1}$$

Sei $y \in \left(B_r^d(x)\right)^c$ gegeben, damit gilt $d(x,y) > r$. Wir definieren $\varepsilon > \frac{d(x,y)-r}{2}$. Der Punkt y ist ein innerer Punkt von $\left(B_r^d(x)\right)^c$, denn für jedes $z \in U_\varepsilon^d(y)$ gilt unter Verwendung der Dreiecksungleichung

$$d(x,z) \geq d(x,y) - d(y,z) > d(x,y)\frac{1}{2} + \frac{1}{2}r > r \tag{2}$$

und damit auch $z \in \left(B_r^d(x)\right)^c$. Damit gilt $U_\varepsilon^d(y) \subseteq \left(B_r^d(x)\right)^c$, also ist $\left(B_r^d(x)\right)^c$ offen und damit sein komplement abgeschlossen. $\square$

2) Nun zeigen wir, dass $\overline{U_\varepsilon^d(y)} \subseteq B_r^d(x)$ gilt: Aus der Definition von $U_r^d(x)$ und $B_r^d(x)$ ist klar, dass $U_\varepsilon^d(y) \subseteq B_r^d(x)$ erfüllt ist und aus der letzten Teilaufgabe wissen wir, dass $B_r^d(x)$ abgeschlossen ist. Der Abschluss von $U_r^d(x)$ ist nach Definition gegeben durch

$$\overline{U_r^d(x)} := \bigcap \left\{K \mid K \subseteq M, \overline{K} = K, U_r^d(x) \subseteq K\right\}. \tag{3}$$

Die Menge $B_r^d(x)$ ist daher einer der Faktoren des Durchschnittes auf der rechten Seite von (3) und damit eine Obermenge von $\overline{U_r^d(x)}$.

3) Ein solches Gegenbeispiel ist mit $M = \mathbb{Z}$, der 3-adischen Metrik d_3 und $U_1^{d_3}(0)$ gegeben. Wir untersuchen zunächst einmal $U_1^{d_3}(0)$ selbst. Sei $m \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir unterscheiden drei Fälle:

   a) Die Zahl m ist 0, dann ist sie in $U_1^{d_3}(0)$ enthalten.
   b) Die Zahl m ist nicht durch 3 teilbar. In diesem Fall gilt $d_3(0,m) = 1 = 3^{-0}$, m ist also nicht in $U_1^{d_3}(0)$ enthalten.
   c) Es gilt $m/3 = k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$. Dann gilt auch $d_3(0,m) = 3^{-|k|} < 1$, also $m \in U_1^{d_3}(0)$.

Zusammenfassend gilt also $U_1^{d_3}(0) = \{3n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Durch die selbe Fallunterscheidung sieht man sofort, dass $U_1^{d_3}(0) = B_{\frac{1}{3}}^{d_3}(0)$ und $B_1^{d_3}(0) = \mathbb{Z}$ gelten. Weil $B_{\frac{1}{3}}^{d_3}(0)$ abgeschlossen ist, ist auch $U_1^{d_3}(0) \subset \mathbb{Z}$ abgeschlossen und echt kleiner als $B_1^{d_3}(0)$. Es gilt also $\overline{U_1^{d_3}(0)} \neq B_1^{d_3}(0)$. $\square$

4) Schließlich ist noch zu zeigen, dass für alle $r > 0$ und $x \in M$, $\overline{U_r^d(x)} \supseteq B_r^d(x)$ gilt, wenn d von einer Norm $\|\cdot\|$ induziert wird ("$\subseteq$" wurde schon in 2) gezeigt.). Wir verwenden die Charakterisierung von Abgeschlossenheit in Bemerkung 1.37.3 im Skript: Für einen Punkt $y \in M$ und $N \subseteq M$ gilt:

$$y \in \overline{N} \iff \forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^d(y) \cap N \neq \emptyset. \tag{4}$$

Sei $y \in B_r^d(x)$ gegeben. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir $y \neq x$ an. Dann ist

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon^d(y) \cap U_r^d(x) \neq \emptyset \tag{5}$$

zu zeigen. Sei daher $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = \frac{1}{2}\min\{\varepsilon, r\}$ und $z = y + \delta\frac{x-y}{\|x-y\|}$. Dann gilt einerseits

$$\|y - z\| = \left\|\delta\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| = \delta < \varepsilon \tag{6}$$

und andererseits

$$\|x - z\| = \left\|x - y - \delta\frac{x-y}{\|x-y\|}\right\| = \frac{\|x-y\|}{\|x-y\|}\|\|x-y\| - \delta\| \tag{7}$$

$$= \max\{\|x-y\| - \delta, \delta - \|x-y\|\} \leq \max\{r - \delta, \delta\} < r. \tag{8}$$

Insgesamt ist also $z \in U^d_\varepsilon(y) \cap U^d_r(x)$. □

Aufgabe 2

Sei $N \subseteq M$.

a) Wir zeigen zuerst "$\Rightarrow$": Es gilt immer $N \subseteq \overline{N}$ aufgrund der Definition von $\overline{N}$ in der ein Durchschnitt gebildet wird über Obermengen von N. Sei N abgeschlossen, dann gilt auch die Umkehrung, denn

$$\overline{N} = \bigcap\{K \mid K^c \in \mathcal{T}, K \supseteq N\} = N \cap \bigcap\{K \mid K^c \in \mathcal{T}, K \supset N\} \subseteq N \tag{9}$$

gilt. Für die andere Implikation "$\Leftarrow$" gelte $\overline{N} = N$. Dann gilt auch

$$N^c = \overline{N}^c = \left(\bigcap\{K \mid K^c \in \mathcal{T}, K \supseteq N\}\right)^c = \bigcup\{K^c \mid K^c \in \mathcal{T}, K \supseteq N\}, \tag{10}$$

dies ist eine Vereinigung offener Mengen und damit offen. Weil N^c offen ist, ist N abgeschlossen. Das war zu zeigen.

Weil der Abschluss jeder Menge $N \subseteq M$ abgeschlossen ist, liefert das Anwenden dieser Regel $\overline{N} = \overline{\overline{N}}$.

b) Wir zeigen zuerst "$\Rightarrow$". Aufgrund der Definition von N° gilt immer $N^\circ \subseteq N$. Sei N offen, dann gilt auch $N \subseteq N^\circ$, denn

$$N^\circ := \bigcup\{K \mid K \in \mathcal{T}, K \subseteq N\} = N \cup \bigcup\{K \mid K \in \mathcal{T}, K \subset N\} \supseteq N. \tag{11}$$

Nun zur umgekehrte Implikation"$\Leftarrow$". Sei $N = N^\circ$, dann ist N eine Vereinigung offener Mengen und damit offen.

Weil das Innere jeder Menge $N \subseteq M$ offen ist, liefert das Anwenden dieser Regel die gewünschte Schlussfolgerung $N^\circ = N^{\circ\circ}$.

Aufgabe 3

Wir beginnen mit einer alternativen Charakterisierung von Berührpunkten.

Lemma 1. *Sei $(Y, \mathcal{T})$ ein topologischer Raum und seien $x \in Y$ und $B \subseteq Y$ gegeben. Dann sind äquivalent:*

a) x ist ein Berührpunkt von B

b) Für alle offenen Umgebungen von x, U_x gilt: $U_x \cap B \neq \emptyset$.

Beweis: Seien $x \in Y$ und $B \subseteq Y$ gegeben. Zunächst stellen wir fest, dass x ein Berührpunkt von B ist genau dann, wenn

$$x \in \bigcap\{K \mid K^c \in \mathcal{T}, K \supseteq B\} = \overline{B} \tag{12}$$

gilt. Dies gilt wiederum genau dann, wenn

$$\forall K \in \{A \mid A^c \in \mathcal{T}\} : K \supseteq B \Rightarrow x \in K \tag{13}$$

erfüllt ist, was wiederum genau dann gilt, wenn

$$\forall U \in \mathcal{T} : U \cap B = \emptyset \Rightarrow x \notin U \tag{14}$$

gilt. Die Aussage (14) gilt nach Kontraposition wiederum genau dann, wenn

$$\forall U \in \mathcal{T} : x \in U \Rightarrow U \cap B \neq \emptyset \tag{15}$$

erfüllt ist. □

Nun zum eigentlichen Beweis. Seien $M, N, \mathcal{T}_M, \mathcal{T}_N, x, A$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Wir zeigen zuerst, dass wenn f stetig ist und x ein Berührpunkt von A ist, so ist $f(x)$ ein Berührpunkt von $f[A]$. Sei dafür $W \in \mathcal{T}_N$ eine Umgebung von $f(x)$ gegeben, weil f stetig ist gilt

$$f^{-1}[W] \in \mathcal{T}_M. \tag{16}$$

Zudem ist x ein Element von $f^{-1}[W]$ und ein Berührpunkt von A, damit gilt aufgrund von Lemma 1:

$$f^{-1}[W] \cap A \neq \emptyset. \tag{17}$$

Wir wählen also $y \in f^{-1}[W] \cap A$ aus, für diesen Punkt gilt nun $f(y) \in W \cap f[A]$ und damit ist $W \cap f[A] \neq \emptyset$ erfüllt.

Nun zeigen wir, dass wenn f Berührpunkte nicht abreißt, so ist es auch stetig. Wir arbeiten mit Kontraposition, nehme also an f sei nicht stetig in x. Dann gibt es nach Definition der Stetigkeit ein $W \in \mathcal{T}_N$ welches $f(x)$ enthält und $f^{-1}[W] \notin \mathcal{T}_M$ erfüllt. Weil $f^{-1}[W]$ also nicht offen ist, können wir $y \in f^{-1}[W]$ wählen, sodass $y \notin \left(f^{-1}[W]\right)^\circ$ gilt. Nach der Definition des Inneren einer Menge gilt daher für jedes $U \in \mathcal{T}_M$

$$y \in U \Rightarrow U \not\subseteq f^{-1}[W]. \tag{18}$$

Das bedeutet, dass $U \cap \left(f^{-1}[W]\right)^c \neq \emptyset$ erfüllt ist. Der Punkt y berührt also $f^{-1}[W^c] = \left(f^{-1}[W]\right)^c$. Der Punkt $f(y)$ berührt aber W^c nicht und damit reißt f Berührpunkte ab. Das sieht man wie folgt ein. Nach Vorraussetzung gilt $y \in f^{-1}[W]$ und damit auch $f(y) \in W \in \mathcal{T}_N$. Damit gilt auch

$$f(y) \notin W^c = \overline{W^c}. \tag{19}$$

□Die gewünschte Schlussfolgerung erfolgt durch anwenden der eben bewiesenen Aussage auf alle Berührpunkte einer beliebigen Menge $A \subseteq M$.

Aufgabe 4

a) Wir zeigen zuerst, dass $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ dicht in l^p für $p < \infty$ ist. Dazu müssen wir zeigen, dass jeder Punkt in l^p ein Berührpunkt von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ ist. Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = a \in l^p$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gegeben. Nach Bemerkung 1.37.3 im Skript reicht es zu zeigen, dass es ein Element aus $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ in der ε-Umgebung von a gibt. Dieses suchen wir nun. Wir wissen, dass $\|a\|_p < \infty$ ist, daher gilt

$$A_N := \sum_{n=0}^{N} |a_n|^p \xrightarrow{N\to\infty} \|a\|_p^p < \infty. \tag{20}$$

Weil $(A_N)_{N\in\mathbb{N}}$ konvergiert können wir $b \in \mathbb{N}$ wählen, sodass $|A_l - \|a\|_p^p| < \varepsilon^p$ für alle $l \geq b$ gilt. Das tun wir auch, dann wählen wir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} = x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ wie folgt

$$\forall n \geq b : x_n = a_n \wedge \forall n > b x_n = 0. \tag{21}$$

Die Folge x ist wohldefiniert, außerdem gilt

$$\|x - a\|_p = \left(\sum_{n=b+1}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} = |A_{b+1} - \|a\|_p^p|^{\frac{1}{p}} < (\varepsilon^p)^{\frac{1}{p}} = \varepsilon. \tag{22}$$

□

b) Nun dazu, dass $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ nicht dicht ist in l^∞. In diesem Fall reicht es aus ein Element zu finden, welches zu jedem Element von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ einen Mindestabstand hat. Wir wählen die konstante 1 Folge, diese ist beschänkt und daher in l^∞. Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = x \in \mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ beliebig gegeben. Nach Definition von $\mathbb{R}^{(\mathbb{N})}$ gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, sodass $x_k = 0$ für alle $k > N$ gilt. Damit gilt für den Abstand von a zu x

$$\|a - x\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - x_n| \geq \sup_{n>N} |1 - x_n| = \sup_{n>N} 1 = 1. \tag{23}$$

$\square$