Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Nach 2.11 der Analysis I Vorlesung ist $U \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ genau dann offen, wenn

(a) $U \cap \mathbb{C}$ offen ist und

(b) falls $\infty \in U$, existiert ein $r > 0$, sodass $\forall\ x \in \mathbb{C}$ aus $|x| > r$ schon $x \in U$ folgt.

Die Metrik

$$d(x,y) := \frac{2|x-y|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}}, x, y \neq \infty$$
$$d(\infty, x) = d(x,\infty) := \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}}$$

tut was wir wollen.
Wir überprüfen, dass dies eine Metrik ist:
Seien $x, y, z \in \mathbb{C}$. Es ist klar, dass d positiv-definit und symmetrisch ist. Für die Dreiecksungleichung verwende man

$$(x-z)(1+y\overline{y}) = x - z + xy\overline{y} - y\overline{y}z = (x-y)(1+\overline{y}z) + (y-z)(1+x\overline{y}) \tag{1}$$

und

$$|1+\overline{y}z|^2 \overset{\Delta-Ungl.}{\leq} 1 + \underbrace{2|y||z|}_{\leq |y|^2+|z|^2} + |y|^2|z|^2 + \leq (1+|y|^2)(1+|z|^2) \tag{2}$$

und damit erhält man

$$\begin{aligned} |x-z|(1+|y|^2) &\overset{(1)}{\leq} |x-y||1+\overline{y}z| + |y-z||1+x\overline{y}| \\ &\overset{(2)}{\leq} |x-y|\sqrt{1+|y|^2}\sqrt{1+|z|^2} + |y-z|\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}. \end{aligned}$$

Nach Multiplikation mit $\frac{2}{\sqrt{1+|x|^1}(1+|y|^2)\sqrt{1+|z|^2}}$ ergibt das die Dreiecksungleichung $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$. Wegen

$$d(x,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|x|^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{2\left|\frac{x}{y} - 1\right|}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{\frac{1}{|y|^2}+1}} = \lim_{y\to\infty} d(x,y), \qquad \forall\ x \in \mathbb{C}$$

ist d eine Metrik auf $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.
Wir überprüfen, dass diese Metrik wirklich tut was wir wollen:
Sei d' die Betragsmetrik auf $\mathbb{C}$ und U eine offene Menge bzgl. d. Sei weiter $x \in U \cap \mathbb{C}$ und $\delta > 0$, sodass $U_\delta(x) \subseteq U$. Für $\varepsilon := \frac{\delta}{2}$ folgt schon $U_\varepsilon^{d'}(x) \subset U_\delta^{d}(x)$. Somit ist U auch offen bzgl. d'.
Für die Umkehrung sei U offen bzgl. d'. Sei nun $x \in U \cap \mathbb{C}$, $x \neq 0$, $\varepsilon \leq \frac{|x|\sqrt{1+4|x|^2}}{\sqrt{1+|x|^2}}$ und $\delta := \frac{\varepsilon}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+4|x|^2}} \Rightarrow \delta \leq \frac{|x|}{1+|x|^2} \leq \frac{1}{\sqrt{1+|x|^2}} \leq 1$. Damit folgt für $y \in U$ mit $d(x,y) < \delta$

$$\frac{2||x|-|y||}{\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+|y|^2}} \leq d(x,y) \leq \delta \Rightarrow 0 \leq (\delta^2(1+|x|^2)-4)|y|^2 + 8|x||y| + (\delta^2(1+|x|^2) - 4|x|^2)$$

Wir wenden die Mitternachtsformel an und erhalten mit $a = \delta^2(1+|x|^2)-4, b = 8|x|, c = \delta^2(1+|x|^2)-4|x|^2$:

$$\Rightarrow |y| \leq \frac{4|x| + \delta(1+|x|^2)\sqrt{4-\delta^2}}{4-\delta^2(1+|x|^2)} \overset{\delta \leq \frac{|x|}{1+|x|^2}}{\leq} \frac{6|x|}{3} = 2|x|.$$

D.h. für $x \in U \cap \mathbb{C}$ folgt aus $d(x,y) < \delta$:

$$|x-y| < \delta\sqrt{1+|x|^2}\sqrt{1+4|x|^2} = \varepsilon, \quad U_\delta^d(x) \subset U_\varepsilon^{d'}(x).$$

Ist $x = 0$, so liefert $\delta := \varepsilon$ für $\varepsilon < 1$ mit $|x-y| = |y| < \frac{\delta}{\sqrt{4-\delta^2}} < \varepsilon$ dasselbe Ergebnis.

Für $\infty \in U, \delta < 1, U_\delta^d(\infty) \subseteq U$ und $|y| > r := \sqrt{\frac{4}{\delta^2} - 1}$ gilt weiter

$$r = \sqrt{\frac{4}{\delta^2} - 1} < |y| \Rightarrow \frac{4}{1+|y|^2} < \delta^2 \Rightarrow d(y,\infty) < \delta \Rightarrow y \in U_\delta^d(\infty) \Rightarrow y \in U$$

Bleibt $U_\delta^d(\infty) \subseteq U$ zu zeigen. Aus $U^c \subset \overline{U_r^{d'}(0)}$, folgt für $\delta < \sqrt{\frac{4}{r^2+1}}$ dass für alle $y \in U_\delta^d(\infty), |y| > r$ und somit $U_\delta^d(\infty) \in U$.

Aufgabe 2

Dem Hinweis folgend imitieren wir den bereits bekannten Beweis. Für $f = 0$ oder $g = 0$ ist die Aussage klar. Sei nun $f \neq 0, g \neq 0$ und damit auch $\|f\| > 0, \|g\| > 0$ für jede Norm $\|\cdot\|$. Nach Voraussetzung ist außerdem $\|f\|_p, \|g\|_p < \infty$, da f unf g stetig auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ sind. Insbesondere gilt nach Aufgabe 1.4 schon

$$\left| \int_b^a f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \int_b^a |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Sei zunächst $1 < p < \infty$. Mit Gleichung (3),1.20, d.h. mit

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \qquad \forall\ 0 \leq a,b < \infty$$

schließen wir für $a = \frac{|f(x)|}{\|f\|_p}, b = \frac{|g(x)|}{\|g\|_p}$ wie folgt

$$\begin{aligned}
\frac{\int_b^a |f(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x}{\|f\|_p\|g\|_q} &= \int_b^a \frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q}\,\mathrm{d}x \\
&\leq \int_b^a \left(\frac{|f(x)|^p}{p\|f\|_p^p} + \frac{|g(x)|^q}{q\|g\|_q^q} \right) \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{p\|f\|_p^p} \underbrace{\int_b^a |f(x)|^p\,\mathrm{d}x}_{=\|f\|_p^p} + \frac{1}{q\|g\|_q^q} \underbrace{\int_b^a |g(x)|^q\,\mathrm{d}x}_{=\|g\|_q^q} \\
&= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1
\end{aligned}$$

Der Fall $p = 1, q = \infty$ folgt direkt aus $|g(x)| \leq \max\{g(y) : y \in [a,b]\} = \|g\|_\infty$. Dieses Maximum existiert, da $[a,b]$ kompakt ist.

$$\int_b^a |f(x)||g(x)|\,\mathrm{d}x \leq \|g\|_\infty \int_b^a |f(x)|\,\mathrm{d}x = \|f\|_1\|g\|_\infty$$

Aufgabe 3

$(b) \Rightarrow (a):$
Gilt (b) so folgt:

$$\sum_{j\in I} f(j)g(j) = \alpha \sum_{j\in I} f(j)\overline{f(j)}|f(j)|^{p-2} = \alpha \sum_{j\in I} |f(j)|^p = \alpha \|f\|_p^p$$

sowie

$$\|g\|_q = \alpha\|h\|_q = \alpha \left(\sum_{j\in I} |f(j)|^{(p-1)q} \right)^{\frac{1}{q}} = \alpha \|f\|^{\frac{p}{q}}.$$

Wegen $\frac{p}{q} + 1 = p\left(\frac{1}{q} + \frac{1}{p}\right) = p$, folgt, dass $\|f\|_p\|g\|_q = \alpha\|f\|_p^p = \sum\limits_{j\in I} f(j)g(j)$.

$(a) \Rightarrow (b):$
Im Fall $g = 0$, wähle $\alpha = 0$. Für $g \neq 0$ ergeben sich aus (a) die Bedingungen

(1) $\sum\limits_{j\in I} f(j)g(j) \geq 0$ (2) Gleichheit in der Hölder-Ungleichung

Insbesondere ist $\sum\limits_{j\in I} f(j)g(j) \in \mathbb{R}$.
Wir machen zwei Beobachtungen:

(i) Aus dem Beweis der Hölder-Ungleichung (Skript S.13) folgt: (2) ist genau dann erfüllt, wenn in der Konvexitätsbedingung der Exponentialfunktion Gleichheit gilt, d.h. genau dann wenn $\log(a^p) = \log(b^q)$ mit $a = \frac{|f(j)|}{\|f\|_p}$ und $b = \frac{|g(j)|}{\|g\|_q}$. Da log auf $(0, \infty)$ injektiv ist, folgt $a^p = b^q$, also $\exists\ \alpha > 0$ (genau $\alpha = \frac{\|g\|_q}{\|f\|_p^{p-1}}$), sodass $\forall\ j \in I$

$$\alpha|f(j)|^{p-1} = \|g\|_q \left(\frac{|f(j)|}{\|f\|_p}\right)^{\frac{p}{q}} = \|g\|_q \left(\frac{|g(j)|}{\|g\|_q}\right)^{\frac{q}{q}} = |g(j)|$$

wobei wir benutzen, dass $\frac{p}{q} = p - 1$. Somit existiert ein $\gamma \in \mathbb{K}^I$ mit $|\gamma(j)| = 1$ und $g(j) = \alpha|f(j)|^{p-1}\gamma(j),\ \forall\ j \in I$.

(ii) Wegen $\sum\limits_{j\in I} |f(j)||g(j)| \geq |\sum\limits_{j\in I} f(j)g(j)| = \underbrace{\|f\|_p\|g\|_q}_{=\sum_{j\in I} f(j)g(j)} \geq \sum\limits_{j\in I} |f(j)g(j)|$, also $\sum\limits_{j\in I} |f(j)g(j)| = \sum\limits_{j\in I} f(j)g(j)$, folgt $f(j)g(j) \in \mathbb{R}_+\ \forall\ j \in I$

Mit diesen beiden Beobachtungen erhalten wir nun für alle $j \in I$ mit $f(j) \neq 0$

$$\begin{aligned}
&f(j)\gamma(j)|f(j)|^{p-1} && \in \mathbb{R}_+ \\
\Rightarrow &f(j)\gamma(j) && \in \mathbb{R}_+ \\
\Rightarrow &\frac{f(j)}{|f(j)|}\gamma(j) && \in \mathbb{R}_+ \\
\overset{(\star)}{\Rightarrow} &\frac{f(j)}{|f(j)|} = \overline{\gamma(j)} && \\
\Rightarrow &\gamma(j)|f(j)| = \overline{f(j)} && \\
\Rightarrow &g(j) = \alpha|f(j)|^{p-2}\overline{f(j)} &&
\end{aligned}$$

Da für alle $j \in I$ mit $f(j) = 0$ mit (i) $g(j) = 0$ folgt, erhalten wir somit insgesamt $g = \alpha h$.
$(\star)$: Da $\left|\frac{f(j)}{|f(j)|}\right| = |\gamma(j)| = 1$ existieren $0 \leq x, y \leq 2\pi$ sodass $\frac{f(j)}{|f(j)|} = e^{i\pi x}$ und $\gamma(j) = e^{i\pi y}$. Aus $\frac{f(j)}{|f(j)|}\gamma(j) = e^{i\pi(x+y)} \in \mathbb{R}_+$ folgt schon $x = -y$.

Aufgabe 4

Beweis durch Widerspruch: Angenommen es existiert $U \in \mathcal{T}$ mit $[0,1] \backslash U \in \mathcal{T}$ und $U \neq \emptyset, U \neq [0,1]$. Sei

$$x := \sup\{y \in [0,1] | [0,y] \in U \ \vee \ [0,y] \in U^c\}.$$

Ist $x = 0$, dann existiert für alle $\varepsilon > 0$ keine ε Umgebung $B_\varepsilon(0)$ um den Punkt 0 mit $B_\varepsilon(0) \subseteq U$ oder $B_\varepsilon(0) \subseteq U^c$. Somit ist 0 weder in U noch in U^c, da in der Standardtopologie alle offenen Mengen Nachbarschaften ihrer Elemente enthalten.
Somit ist $x > 0$. Angenommen x ist in U. Da U offen ist existiert ein $\varepsilon > 0$ sodass $B_\varepsilon(x) \subseteq U$. Damit ist auch das Intervall $[x, x+\varepsilon/2] \subseteq U$ und mit der Definition von x auch $[0, x+\varepsilon/2] \in U$. Dies ist aber ein Widerspruch zur Supremumseigenschaft von x.
x in U^c führt man komplett analog zum Widerspruch.
Somit kann weder $x = 0$ noch $x > 0$ gelten, womit wir unsere erste Annahme zu einem Widerspruch geführt haben.