Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

## Aufgabe 1

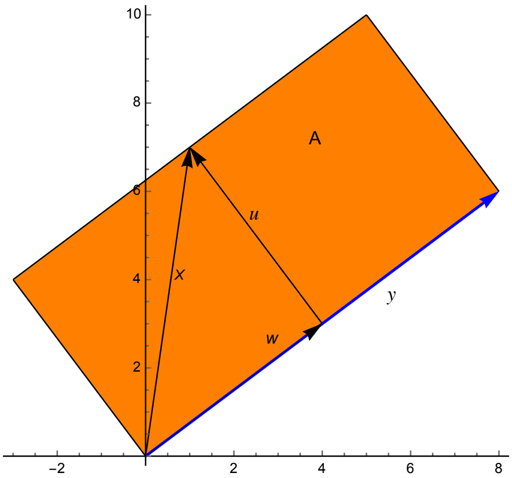


Abbildung 1: Cauchy-Schwarz-Ungl.

In der nebenstehenden Graphik sind $x, y$ und $u$ wie in der Aufgabenstellung definiert und es gilt $w := \frac{\langle x,y\rangle}{\|y\|^2} y$. Mit $A$ ist der Flächeninhalt des von $u$ und $y$ aufgespannten Rechteckes gemeint. Die Rechnung zu $u$ lautet wie folgt

$$u = x - \frac{1}{64+36} \left\langle \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} \right\rangle y \tag{1}$$

$$= x - \frac{50}{100} y = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

Das folgende Hilfslemma ist sehr nützlich. Wir bezeichnen im Folgenden den Realteil einer komplexen Zahl $z$ mit $\Re z$.

**Lemma 1.** *Binomische Formel im Hilbertraum: Sei $\mathcal{H}$ ein Hilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und induzierter Norm $\| \cdot \|$. Es gilt*

$$\forall x, y \in \mathcal{H} : \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\left(\langle x, y\rangle\right). \tag{3}$$

**Beweis:** Seien $\mathcal{H} \ni x, y, \langle \cdot, \cdot \rangle, \| \cdot \|$ wie im Lemma. Dann gilt

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y, x+y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \tag{4}$$

$$= \|x\|^2 + \|y\|^2 + \langle x, y\rangle + \overline{\langle x, y\rangle} = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\Re\left(\langle x, y\rangle\right). \tag{5}$$

□

Die Größe $A$ veranschaulicht außerdem den Restterm der Cauchy-Schwarz Ungleichung, denn es gilt

$$A^2 = \|u\|^2\|y\|^2 = \left\| x\|y\| - \langle x, y\rangle \frac{y}{\|y\|} \right\|^2 \overset{\text{Lemma 1}}{=} \|x\|^2\|y\|^2 + \langle x, y\rangle^2 \frac{\|y\|^2}{\|y\|^2} \tag{6}$$

$$-2\langle x, y\rangle\langle x, y\rangle \frac{\|y\|}{\|y\|} = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle^2. \tag{7}$$

Somit ist der Restterm gleich dem Quadrat der Fläche des von $u$ und $y$ aufgespannten Rechteckes.

## Aufgabe 2

Sei $V$ ein $\mathbb{R}-$Vektorraum und $\|\cdot\|$ eine Halbnorm auf $V$. Wir definieren $B := \{x \in V \mid \|x\| \leq 1\}$. Es ist zu zeigen, dass $B$ konvex ist (Definition dafür ist in der Aufgabenstellung). Nehme dafür an, dass $x, y \in B$ und $t \in [0, 1]$ gelten, dann gilt auch

$$\|(1-t)x + ty\| \overset{\Delta-\text{Ungl.}}{\leq} \|(1-t)x\| + \|ty\| = (1-t)\|x\| + t\|y\| \tag{8}$$

$$\overset{x,y \in B}{\leq} 1 - t + t = 1 \tag{9}$$

$\square$

## Aufgabe 3

a): Wir gehen die Definition einer Halbnorm durch. Sei $f \in \mathcal{R}$ gegeben. Wir verwenden dabei mehrfach, dass $|\cdot|$ eine Norm auf $\mathbb{R}$ ist, wir kennzeichnen das jeweils mit $*$.

1): Nichtnegativität: Es gilt für alle $x \in [0,1]$: $|f(x)| \overset{*}{\geq} 0$ und daher nach der Monotonie des Integrals auch

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x \geq \int_0^1 0\mathrm{d}x = 0. \tag{10}$$

2): Homogenität: Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ gegeben. Dann gilt:

$$\|\lambda f\|_1 = \int_0^1 |\lambda f(x)|\mathrm{d}x \overset{*}{=} \int_0^1 |\lambda||f(x)|\mathrm{d}x = |\lambda| \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x = |\lambda|\|f\|_1. \tag{11}$$

3): Dreiecksungleichung: Sei $g \in \mathcal{R}$ gegeben. Dann gilt:

$$\|f+g\|_1 = \int_0^1 |f(x)+g(x)|\mathrm{d}x \overset{*}{\leq} \int_0^1 (|f(x)|+|g(x)|)\mathrm{d}x \tag{12}$$

$$= \int_0^1 |f(x)|\mathrm{d}x + \int_0^1 |g(x)|\mathrm{d}x = \|f\|_1 + \|g\|_1. \tag{13}$$

4): Die Halbnorm $\|\cdot\|_1$ ist keine Norm denn

$$f_0 : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{14}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \end{cases} \tag{15}$$

ist Riemann integrierbar erfüllt aber $\|f_0\| = 0$. Diese letzte Behauptung ist noch zu beweisen (man erinnere sich an Def 5.4 aus dem Skript der Analysis einer Variablen). Zum Beweis sei $\varepsilon > 0$ gegeben, wir wählen $f, g \in \mathcal{T}[0,1]$(Notation aus Def 5.1 im Ana1 Skript) wie folgt:

$$f : [0,1] \to \mathbb{R} \tag{16}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{für } x < \varepsilon \\ 0 & \text{für } x \geq \varepsilon \end{cases} \tag{17}$$

und $g$ ist die konstante Nullfunktion. Dann gilt $g \leq f_0 \leq f$ und

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = \varepsilon \leq \varepsilon. \tag{18}$$

Die Funktion $f_0$ ist also Riemann integrierbar. Weil die einzige Treppenfunktion auf $[0,1]$ welche kleiner als $f_0$ ist $g$ ist, gilt

$$\int_0^1 f_0(x)\mathrm{d}x = \sup_{h \in \mathcal{T}, h \leq f_0} \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \sup_{h \in \{g\}} \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\mathrm{d}x = 0 \tag{19}$$

b): Wir beweisen zuerst die Existenz und Wohldefiniertheit. Wir definieren

$$J : V \backslash N \to \mathbb{R} \tag{20}$$

$$w \mapsto \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \quad \text{für } f \in w. \tag{21}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert($J(w)$ ist immer eindeutig für $w \in V/N$), denn für $w \in V/N$ und $f_1, f_2 \in w$ gilt

$$f_1 - f_2 \in N. \tag{22}$$

Daher gilt auch

$$\begin{aligned} I(f_1) - I(f_2) = \int_0^1 (f_1(x) - f_2(x))\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f_1(x) - f_2(x)|\mathrm{d}x = 0 \\ \iff I(f_1) - I(f_2) \leq 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} I(f_2) - I(f_1) = \int_0^1 (f_2(x) - f_1(x))\mathrm{d}x \leq \int_0^1 |f_2(x) - f_1(x)|\mathrm{d}x = 0 \\ \iff I(f_1) - I(f_2) \geq 0, \end{aligned}$$

also $I(f_1) = I(f_2)$. Die Abbildung erfüllt also

$$\forall f \in V: \quad I(f) = J(f + N). \tag{23}$$

Wir wenden uns jetzt der Eindeutigkeit von $J$ zu, nehme also an, es gibt $J'$ das ebenfalls

$$\forall f \in V: \quad I(f) = J'(f + N) \tag{24}$$

erfüllt. Sei $c \in V \backslash N$ gegeben, wähle $h \in c$. Dann gilt

$$J(c) \overset{(23)}{=} \int_0^1 h(x)\mathrm{d}x \overset{(24)}{=} J'(c), \tag{25}$$

also sind die beiden Abbildungen identisch. $\square$

## Aufgabe 4

a): Wir beschränken uns darauf zu zeigen, dass $B^{++} := B \cap \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}_0^+$ konvex ist. Wir machen das Argument explizit warum es ausreicht sich auf die halbe Menge

$$B^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < \sqrt[3]{1 - |x_1|^3} \wedge x_2 \geq 0 \right\}. \tag{26}$$

zu beschänken, anschließendes anwenden eines analogen Argumentes gibt dann den betrachteten Spezialfall. Der Beweis für $B^- := B \cap \mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^-$ identisch zu dem von $B^+$ und für beliebige $x_+ \in B^+$ und $x_- \in B^-$ kann die Menge

$$L := \{tx_- + (1-t)x_+ \mid t \in [0,1]\} \tag{27}$$

aufgeteilt werden in einen Teil in $B^+$ und einen Teil in $B^-$ mit mindestens einem Punkt $(z_1, z_2) = z$ der in beiden Mengen ist. Das sieht man so ein: Wähle $(a_1, a_2) = a \in B^+$ und $(b_1, b_2) = b \in B^-$. Falls $a_2 = 0$ oder $b_2 = 0$ gilt gibt es nichts zu zeigen, nehme also an $a_2 > 0$ oder $b_2 < 0$. Dann gilt

$$z := t'a + (1-t)b \in L \quad \text{für } t' = \frac{b_2}{b_2 - a_2} < 1. \tag{28}$$

Durch einsetzen sieht man, dass $z_2 = 0$ ist. Außerdem gilt $z \in B^+ \cap B^-$, aufgrund von

$$|z_1| = \left| \frac{b_2}{b_2 - a_2} a_1 + \frac{-a_2}{b_2 - a_2} b_1 \right| \leq \frac{b_2 - a_2}{b_2 - a_2} \max\{|a_1|, |b_1|\} < 1. \tag{29}$$

Daher gilt $|z_1|^3 + |z_2|^3 < 1$ und $z_2 = 0$, also $z \in B^+ \cap B^-$. Nun gilt also

$$\begin{aligned}&\{tx_- + (1-t)x_+ \mid t \in [0,1]\} = \\ &\{tx_- + (1-t)z \mid t \in [0,1]\} \cup \{tz + (1-t)x_+ \mid t \in [0,1]\} \subset B^- \cup B^+ = B.\end{aligned}$$

Es reicht also zu zeigen, dass $B^+$ konvex ist. Mit dem gleichen Argument noch einmal angewendet können wir uns auf $B^{++}$ zu beschränken. Zu diesem Zweck formulieren wir $B^{++}$ wie folgt um

$$B^{++} = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < \sqrt[3]{1-|x_1|^3} \wedge x_1, x_2 \geq 0\right\}. \tag{30}$$

Diese Menge wird also von der Funktion

$$\begin{aligned} b : [0,1] &\to \mathbb{R} && (31)\\ z &\mapsto \sqrt[3]{1-|z|^3} && (32)\end{aligned}$$

beschränkt.

Diese Funktion ist stetig und ist in $]0,1[$ zweimal stetig diffbar. Sie ist auch strikt konkav, denn es gilt Satz 4.23 aus dem Analysis 1 Skript und für alle $z \in ]0,1[$

$$b'(z) = \begin{cases} -z^2(1-|z|^3)^{\frac{-2}{3}} & z \geq 0 \\ +z^2(1-|z|^3)^{\frac{-2}{3}} & z < 0 \end{cases} \tag{33}$$

$$b''(z) = -2|z|(1-|z|^3)^{\frac{-5}{3}} < 0. \tag{34}$$

Damit gilt für $y, x \in B^{++}$ und $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned} b(ty_1 + (1-t)x_1) > tb(y_1) + (1-t)b(x_1) > ty_2 + (1-t)x_2 = |ty_2 + (1-t)x_2| \\ \iff 1 - |ty_1 + (1-t)x_1|^3 > |ty_2 + (1-t)x_2|^3 \\ \iff |ty_1 + (1-t)x_1|^3 + |ty_2 + (1-t)x_2|^3 < 1,\end{aligned}$$

das war zu zeigen.

b): siehe Skizze I

c): Wir zeigen, dass konkave Funktionen welche im Inneren von $J$ zweimal stetig differenzierbar sind, immer unterhalb ihrer Tangenten verlaufen. Anschließend zeigen wir, dass $H_{v^*}$ die von einer Tangenten von $b$ begrenzte Halbebene ist. Von der oberen Schranke ist nach Teilaufgabe a) schon bekannt, dass sie konkav ist.(allerdings nicht strikt konkav, weil $b''(0) = 0$ ist) Sei $J \subseteq \mathbb{R}$ ein Intervall, $f : J \to \mathbb{R}$ konkav und zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt nach Satz 4.23(Skript der Analysis 1) $f'' \leq 0$. Verwendung der Taylorformel bis zur zweiten Ordnung mit dem Restglied aus dem Mittelwertsatz gibt für $x < y \in J$ ein $\xi \in ]x,y[$, sodas:

$$f(y) = f(x) + f'(x)(y-x) + \frac{f''(\xi)}{2}(y-x)^2 \tag{35}$$

gilt. Aufgrund von $f'' \leq 0$ gilt damit auch

$$f(y) \leq f(x) + f'(x)(y-x). \tag{36}$$

Der Fall $x > y$ kann genau so abgehandelt werden. Es bleibt noch zu zeigen, dass $H_{v^*}$ von einer Tangente von $b$ beschränkt wird. Wir formulieren also $B$ um:

$$B = \left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < \sqrt[3]{1-|x_1|^3} \wedge x_2 > -\sqrt[3]{1-|x_1|^3}\right\}. \tag{37}$$

Was noch bleibt ist zu zeigen, dass die $H_{v^*}$ definierende Gleichung eine Tangente von $b$ beschreibt. Hierfür bestimmen wir die Tangente an den Graph von $b$ am Punkt $v$. Einsetzen in $b'$ und in die Tangentengleichung ergibt:

$$\begin{aligned} t_v : [-1,1] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto -7^{\frac{-2}{3}}\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{\sqrt[3]{7}}{2} = 7^{-\frac{2}{3}}(4-x).\end{aligned}$$

Zum vergleich zu $H_{v^*}$ schreiben wir dessen Definition um:

$$H_{v^*} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x_1}{4} + \frac{7^{\frac{2}{3}}}{4} x_2 < 1 \right\} = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid x_2 < 7^{-\frac{2}{3}}(4 - x_1) \right\}$$

Weil $t_v$ mit der oberen Schranke von $H_{v^*}$ übereinstimmt und $b$ unterhalb von $t_v$ verläuft und die obere Schranke von $B$ ist, muss $B \subseteq H_{v^*}$ gelten. Auserdem gilt

$$\langle v^*, v \rangle = \frac{1}{8} + \frac{7}{8} = 1. \tag{38}$$

d): Siehe Skizze I

e): Seien $y, w \in B^*$, $x \in B$ und $t \in [0.1]$ beliebig gegeben. Es ist zu zeigen, dass $\langle tw + (1-t)y, x \rangle < 1$ gilt. Nach Definition von $B^*$ und $B$ gilt

$$\langle w, x \rangle < 1 \wedge \langle y, x \rangle < 1. \tag{39}$$

Damit gilt insbesondere auch

$$\langle tw + (1-t)y, x \rangle = t\langle w, x \rangle + (1-t)\langle y, x \rangle < t + 1 - t = 1. \tag{40}$$

□

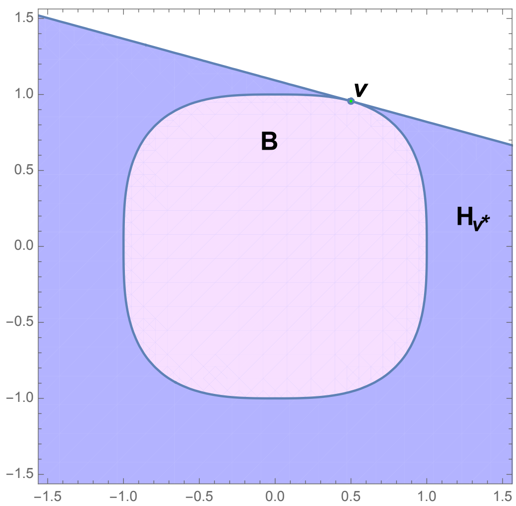


Abbildung 2: Skizze I