Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

a) i) Wir parametrisieren den Weg mit $\varphi(t) = (t, t), t \in [0, 1]$, dann ergibt sich für ω

$$3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = 3t^3\mathrm{d}t + t^3\mathrm{d}t = 4t^3\mathrm{d}t, \tag{1}$$

und damit

$$\int_{C_1} \omega = \int_0^1 4t^3\mathrm{d}t = 1. \tag{2}$$

Für χ ergibt sich

$$y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = t\mathrm{d}t - t\mathrm{d}t = 0 \tag{3}$$

und daher auch $\int_{C_1} \chi = 0$.

ii) Dieser Weg parametrisieren wir mit $(t, t^2), t \in [0, 1]$. Damit ergibt sich für ω

$$3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = 3t^4\mathrm{d}t + t^3 2t\mathrm{d}t = 5t^4\mathrm{d}t, \tag{4}$$

also wird das Wegintegral

$$\int_{C_2} \omega = \int_0^1 5t^4\mathrm{d}t = 1. \tag{5}$$

Für χ ergibt sich $y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y = t^2\mathrm{d}t - 2t^2\mathrm{d}t = -t^2\mathrm{d}t$ und für das Wegintegral ergibt sich dann

$$\int_{C_2} \chi = \int_0^1 -t^2\mathrm{d}t = -\frac{1}{3}. \tag{6}$$

iii) Der dritte Weg wird aufgeteilt in zwei Wege, genannt $C_{3,1}$ und $C_{3,2}$, die parametrisiert werden mit $(t, 0), t \in [0, 1]$ und $(1, \tau), \tau \in [0, 1]$. Für ω ergibt sich auf den beiden Teilwegen

$$\omega(t)|_{C_{3,1}} = 3x^2(t)y(t)\mathrm{d}x(t) + x^3(t)\mathrm{d}y(t) = 3t^2 \cdot 0\mathrm{d}t + t^3\mathrm{d}0 = 0, \tag{7}$$

$$\omega(\tau)|_{C_{3,1}} = 3 \cdot 1\tau\mathrm{d}1 + 1^3\mathrm{d}\tau = \mathrm{d}\tau \tag{8}$$

und daher für den Gesamten Weg

$$\int_{C_3} \omega = \int_{C_{3,1}} \omega + \int_{C_{3,2}} \omega = 0 + \int_0^1 \mathrm{d}\tau = 1. \tag{9}$$

Die gleiche Konstruktion für χ ergibt:

$$\chi|_{C_{3,1}} = 0\mathrm{d}t - t\mathrm{d}0 = 0, \tag{10}$$

$$\chi|_{C_{3,2}} = \tau\mathrm{d}1 - 1\mathrm{d}\tau = -\mathrm{d}\tau \tag{11}$$

also für das Wegintegral

$$\int_{C_3} \chi = \int_{C_{3,1}} \chi + \int_{C_{3,2}} \chi = \int_0^1 -\mathrm{d}\tau = -1. \tag{12}$$

Wir stellen also fest, dass die Wegintegrale bei ω nicht vom Weg abzuhängen scheinen, während sie bei χ vom Weg abhängen.

b) Für ω sehen wir
$$\omega = 3x^2y\mathrm{d}x + x^3\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(x^3y\right). \tag{13}$$
Die 1-Form ω ist also exakt mit Stammfunktion $(x,y) \mapsto x^3y$ und daher geschlossen. Nun finden wir, dass χ nicht geschlossen ist, denn es gilt
$$\frac{-\partial x}{\partial x} = -1 \neq \frac{\partial y}{\partial y} = 1. \tag{14}$$

Aufgabe 2

a) Nach Definition 2.27 des Skriptes gilt mit $f, g, \omega, l, m, n, U, V, W$ wie in der Aufgabenstellung und $x \in U$
$$(f^*(g * (\omega)))_x = f^*(\omega \circ \mathrm{d}g)_x = (\omega \circ \mathrm{d}g)_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x = \omega_{g(f(x))} \circ (\mathrm{d}g)_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x \tag{15}$$
für die linke Seite der zu zeigenden Gleichung. Für die rechte Seite gilt
$$((g \circ f)^*\omega)_x = (\omega \circ \mathrm{d}(g \circ f))_x \overset{\Lambda}{=} (\omega \circ \mathrm{d}g \circ \mathrm{d}f)_x = \omega_{g(f(x))} \circ \mathrm{d}g_{f(x)} \circ \mathrm{d}f_x, \tag{16}$$
wobei wir bei Λ die Kettenregel verwendet haben.

b) Die gewünschte Identität folgt daraus, dass die Linearisierung der Identität gleich der Identität ist. Es gilt für $x \in W$
$$(\mathrm{id}_W^*\omega)_x = (\omega \circ \mathrm{d}\mathrm{id}_W) = (\omega \circ \mathrm{id}_W)_x = \omega_x. \tag{17}$$
□

Aufgabe 3

Es sei $C \subseteq W$ eine Kurve durch ein Teilgebiet von $\mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ und $\omega : W \to (\mathbb{R}^n)'$, $x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \sum_{l=1}^n f_l(x)\mathrm{d}x_l$, weiter sei $\varphi : [0,1] \to C$ eine Parametrisierung von C. Dann gilt
$$\int_C \omega = \int_0^1 \sum_{l=1}^n f_l(\varphi(t))\frac{\mathrm{d}\varphi(t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \overset{\tau=1-t}{=} -\int_1^0 \sum_{l=1}^n f_l(\varphi(\tau))\frac{\mathrm{d}\varphi(\tau)}{\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}\tau.$$
Das letzte Integral beschreibt dabei $\int_C \omega$ in umgedrehter Durchlaufrichtung. □

Aufgabe 4

Seien wie in der Aufgabenstellung $V \subseteq \mathbb{R}^n, n \in \mathbb{N}$ ein sternförmiges Gebiet mit Zentrum 0 und $h : [0,1] \times V \to V, h(t,x) = tx$ gegeben. Sei außerdem $\omega = \sum_{l=1}^n \alpha_l \mathrm{d}x_l \in Z^1(V)$ eine geschlossene 1-Form mit Koeffizienten $\alpha_l : V \to \mathbb{R}$ glatt. Nun werden wir gebeten
$$f(x) := I_V h^*\omega(x) = I_V(\omega \circ \mathrm{d}h)_x \tag{18}$$
zu berechnen. Nun ergibt sich
$$\omega \circ \mathrm{d}h = \sum_{l=1}^n \alpha_l(tx)\mathrm{d}(tx_l) = \sum_{l=1}^n \alpha_l(tx)(t\mathrm{d}x_l + x_l\mathrm{d}t) = \sum_{l=1}^n \alpha_l(tx)x_l\mathrm{d}t + t\sum_{l=1}^n \alpha_l(tx)\mathrm{d}x_l. \tag{19}$$
Beispiel 2.130 entnehmen wir dann
$$I_V h^*\omega(x) = \int_0^1 \sum_{l=1}^n \alpha_l(tx)x_l\mathrm{d}t = \sum_{l=1}^n x_l \int_0^1 \alpha_l(tx)\mathrm{d}t. \tag{20}$$

Damit ergibt sich

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 \alpha_l(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_l + \sum_{l=1}^{n} x_l \int_0^1 \sum_{k=1}^{n} D_k\alpha_l(tx)t\mathrm{d}x_k\mathrm{d}t,$$

weil ω geschlossen ist, können wir die Ableitungen austauschen. Damit gilt

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 \alpha_l(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_l + \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} x_l \int_0^1 tD_l\alpha_k(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_k. \tag{21}$$

Nun den zweiten Summanden kann man mit der Kettenregel zusammenfassen, sodass sich partielle Integration anbietet

$$\mathrm{d}f(x) = \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 \alpha_l(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_l + \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 t\frac{\partial}{\partial t}\alpha_k(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_k \tag{22}$$

$$= \sum_{l=1}^{n} \int_0^1 \alpha_l(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_l + \sum_{k=1}^{n} t\alpha_k(tx)\big|_{t=0}^{1}\,\mathrm{d}x_k - \sum_{k=1}^{n} \int_0^1 \alpha_k(tx)\mathrm{d}t\mathrm{d}x_k \tag{23}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(x)\mathrm{d}x_k = \omega(x) \tag{24}$$