Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

(a) Siehe Satz 2.73

(b) Für $f(X,Y) = YX - XB$ ist $f(X, g(X)) = 0$. Dann ist g nach (a) stetig differenzierbar mit Ableitung

$$dg_X = -d_2 f_{(X,g(X))}{}^{-1} \circ d_1 f_{(X,g(X))}$$

wobei $d_1 f_{X,Y}(Z) = YZ - ZB$ und $d_2 f_{X,Y}(Z) = ZX$. Somit ergibt sich

$$d_1 f_{Id}(Z) = BZ - ZB \quad \text{und} \quad -(d_2 f_{Id})^{-1}(Z) = -Z$$

und folglich

$$dg_{Id}(Z) = ZB - BZ.$$

Aufgabe 2

(a) Die Menge M ist die Schnittmenge aus zwei kompakten Mengen. Die beiden Mengen sind jeweils beschränkt und der Rand einer offenen Menge (jeweils Kugeln) und damit abgeschlossen. Weiter hat M Dimension 1, da es der Schnitt von zwei nicht gleichen Kugeln ist.

(b) Um zu zeigen, dass M eine eindimensionale C^1-Untermannigfaltigkeit ist halten wir uns an Beispiel 2.80 und berechnen die Jacobimatrix von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, (x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 \end{pmatrix}$

$$Df = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-2) & 2y & 2z \end{pmatrix}$$

Diese hat Rang 2. Damit erfüllt diese die Regularitätsbedingung.

(c) Siehe Satz 2.100

(d) Da M kompakt ist, wissen wir, dass das Maximum existiert. Nach Korollar 2.99 wissen wir, dass lokale Extrema auf Untermannigfaltigkeiten genau statischen Punkten von f entsprechen. Diese können wir mit Satz 2.100 berechnen. Wir stellen also das entsprechende Gleichungssystem für $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ auf

$$\begin{aligned} 2x\mu_1 + 2(x-2)\mu_2 &= 2 \\ 2y\mu_1 + 2y\mu_2 &= 1 \\ 2z\mu_1 + 2z\mu_2 &= 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 &= 3 \\ (x-2)^2 + y^2 + z^2 &= 3 \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat die Lösungen $(x,y,z) = (1,1,1)$ und $(x,y,z) = (1,-1,-1)$. Da $f(1,1,1) = 3 > f(1,-1,-1) = 0$ ist das Maximum von f über M gleich 3 und wird im Punkt $(1,1,1)$ angenommen.

Aufgabe 3

(a) Siehe Satz 1.134

(b) Da $C([0,1],\mathbb{R})$ vollständig bzgl der Spupremumsnorm ist, müssen wir nur noch zeigen, dass h: $g(x) \mapsto \int\limits_0^x f(x,y,g(y))\,\mathrm{d}y$ eine Kontraktion bzgl. der Supremumsnorm ist um den Banachschen Fixpunktsatz anzuwenden. Wir wissen, dass

$$\sup_{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3} \left|\frac{\partial}{\partial z} f(x,y,z)\right| =: k < 1.$$

Daraus folgt, dass f Lipschitzstetig in z ist, also für alle $z, z' \in \mathbb{R}$

$$\|f(x,y,z) - f(x,y,z')\|_\infty < k \cdot \|z - z'\|_\infty.$$

Damit berechnen wir nun für $g, g' \in C([0,1],\mathbb{R})$

$$\begin{aligned}
\|h(g) - h(g')\|_\infty &= \left\| \int\limits_0^x f(x,y,g(y))\,\mathrm{d}y - \int\limits_0^x f(x,y,g'(y))\,\mathrm{d}y \right\|_\infty \\
&\leq \int\limits_0^x \|f(x,y,g(y))\,\mathrm{d}y - f(x,y,g'(y))\|_\infty \,\mathrm{d}y \\
&< \int\limits_0^x k\,\|g(y) - g'(y)\|_\infty \,\mathrm{d}y = xk\,\|g(y) - g'(y)\|_\infty .
\end{aligned}$$

Da $x \in [0,1]$ ist $kx < 1$ und somit ist h eine Kontraktion. Somit gibt es ein eindeutig definiertes $g, \in C([0,1],\mathbb{R})$ für das $g = h(g)$ gilt.

Aufgabe 4

(a) Siehe Satz 1.182

(b) $[0,1]$ ist ein nicht-leerer kompakter Hausdorffraum. Eigenschaften 1. - 4. in Satz 1.182 sind klar, da M einen Untervektorraum aufspannt. Bleibt noch punktetrennend. Dies ist auch klar, da $e^x : [0,1] \to [1,e]$ bijektiv ist. Somit ist nach dem Satz von Stone-Weierstraß der von M aufgespannte Untervektorraum dicht in $C([0,1],\mathbb{R})$ bzgl. der Supremumsnorm.

(c) Da f stetig auf einem kompakten Intervall ist, ist f beschränkt und damit ist $\int\limits_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x =: k < \infty$. Sei also nun $g, g' \in C([0,1],\mathbb{R})$ mit $\|g - g'\| < \frac{\varepsilon}{k}$ gegeben. Dann ist

$$\begin{aligned}
|\phi_f(g) - \phi_f(g')| &= \left| \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_0^1 f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \right| = \left| \int\limits_0^1 f(x)(g(x) - g'(x))\,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq \int\limits_0^1 |f(x)| \cdot |g(x) - g'(x)|\,\mathrm{d}x \leq \frac{\varepsilon}{k} \int\limits_0^1 |f(x)|\,\mathrm{d}x = \varepsilon
\end{aligned}$$

Damit ist ϕ_f stetig.

(d) Aus der Linearität des Integrals folgt schon, dass $\int\limits_0^1 f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle g aus dem von M aufgespannten Untervektorraum. Damit ist ϕ auf dem von M aufgespannten Untervektorraum die Nullabbildung. Da ϕ nach (c) stetig ist und da der von M aufgespannte

Untervektorraum nach (b) dicht in $C([0,1],\mathbb{R})$ ist, ist ϕ schon überall die Nullabbildung. Somit ist $\int_0^1 f(x)h(x)\,\mathrm{d}x = 0$ für alle $h \in C([0,1],\mathbb{R})$. Für $h(x) = f(x)$ gilt somit

$$\int_0^1 f(x)^2\,\mathrm{d}x = 0$$

und da $f(x)^2 \geq 0\ \forall\ x \in [0,1]$ ist schon $f = 0$.