Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Seien $m \in \mathbb{N}$ und die Folge $(h_k)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ gegeben. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir $\tilde{h}_n := (h_1, \ldots, h_n) \in \mathbb{R}^n$. Dann ist zu zeigen, dass

$$(h_1 + \cdots + h_n)^m = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}^n \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\tilde{h}_n^\alpha \tag{1}$$

gilt. Wir erinnern uns dabei daran, dass für einen Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$ der Betrag und die Fakultät so definiert sind

$$|\alpha| := \sum_{k=1}^n \alpha_k \wedge \alpha! := \prod_{k=1}^n \alpha_k!. \tag{2}$$

Vektoren zu Potenzen von Multiindizes α gleicher Dimension n sind definiert als

$$\tilde{h}_n^\alpha = \prod_{k=1}^n h_k^{\alpha_k} \tag{3}$$

Gleichung (1) könnte man sowohl über Induktion über m als auch über Induktion über n zeigen. Wir entscheiden uns für die zweite Variante. Dabei Ist der Induktionsanfang bei $n = 0$ trivial, für $n = 1$ gibt es ebenfalls nichts zu zeigen und für $n = 2$ reduziert sich (1) auf die binomische Formel, welche letztes Semester gezeigt wurde. Wir beschränken uns also auf den Induktionsschritt für ein $n \in \mathbb{N}_0$ mit $n \geq 2$. Sei ein solches n gegeben. Wir Klammern die Summe zuerst so, dass die Induktionsvoraussetzung anwendbar ist und verwenden dann (1) für $n = 2$ noch einmal explizit. Aufgrund von (3) kann man Potenzen von Vektoren elementweise auseinander ziehen. Im folgenden steht $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ für einen n-dimensionalen Multiindex. Es folgt

$$\begin{aligned}
(h_1 + \cdots + h_n + h_{n+1})^m &= (h_1 + \cdots + h_{n-1} + (h_n + h_{n+1}))^m = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}(h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n + h_{n+1})^\alpha \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}(h_1, \ldots, h_{n-1}, 1)^\alpha (h_n + h_{n+1})^{\alpha_n} = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}(h_1, \ldots, h_{n-1}, 1)^\alpha \sum_{k=0}^{\alpha_n} \binom{\alpha_n}{k} h_n^k h_{n+1}^{\alpha_n - k} \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}(h_1, \ldots, h_{n-1}, 1)^\alpha \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0 \\ a+b=\alpha_n}} \frac{\alpha_n!}{a!b!} h_n^a h_{n+1}^b = \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0 \\ a+b=\alpha_n}} \frac{|\alpha|!}{\alpha!}\frac{\alpha_n!}{a!b!}(h_1, \ldots, h_{n-1}, 1)^\alpha h_n^a h_{n+1}^b \\
&= \sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}_0^n \\ |\alpha|=m}} \sum_{\substack{a,b\in\mathbb{N}_0 \\ a+b=\alpha_n}} \frac{|\alpha|!}{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a, b)!}(h_1, \ldots, h_{n-1}, h_n, h_{n+1})^{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, a, b)}
\end{aligned}$$

Wobei in der letzten Gleichheit der Faktor $\alpha_n!$ gekürzt wurde. Wir stellen nun fest, dass $\alpha_1 + \alpha_{n-1} + a + b = m$ gilt und damit der im Exponenten und im Nenner auftauchende Multiindex den gleichen Betrag hat wie α. Zudem summieren wir über alle Multiindizes mit dieser Bedingung. Man kann das Ergebnis also auch so umschreiben

$$(h_1 + \cdots + h_n + h_{n+1})^m = \sum_{\substack{\beta\in\mathbb{N}_0^{n+1} \\ |\beta|=m}} \frac{|\beta|!}{\beta!}\tilde{h}_{n+1}^\beta. \tag{4}$$

$\square$

Aufgabe 2

a) Es sind die Stationären Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto ((x+y)^2-1)^2+(x-y)^2$ zu finden und zu charakterisieren. Wir berechnen zuerst den Gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2((x+y)^2-1)2(x+y) + 2(x-y) \\ 2((x+y)^2-1)2(x+y) + 2(y-x) \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Dieser verschwindet genau dann wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2((x+y)^2-1)2(x+y) + 2(x-y) = 0 \\ 2((x+y)^2-1)2(x+y) + 2(y-x) = 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Der erste Summand ist jeweils der Gleiche und der zweite Summand unterscheidet sich nur durch das Vorzeichen. Das Gleichungssystem ist also äquivalent zu der Aussage

$$x - y = ((x+y)^2-1)2(x+y) = y - x. \tag{6}$$

Damit muss sowohl $x = y$ als auch $(x+y)^2-1)2(x+y) = 0$ erfüllt sein. Wir setzen also $x = y$ in die zweite Gleichung ein und erhalten

$$(4x^2-1)4x = 0. \tag{7}$$

Diese Gleichung ist erfüllt wenn $x = 0$ oder $x = \frac{\pm 1}{2}$ gelten. Insgesamt gibt es also drei stationäre Punkte, $(0, 0)$, $(0.5, 0.5)$ und $(-0.5, -0.5)$. Um diese Punkte zu charakterisieren berechnen wir die Hessematrix von f

$$\begin{aligned} D^2 f(x, y) &= \begin{pmatrix} 8(x+y)^2 + 4((x+y)^2-1) + 2 & 8(x+y)^2 + 4((x+y)^2-1) - 2 \\ 8(x+y)^2 + 4((x+y)^2-1) - 2 & 8(x+y)^2 + 4((x+y)^2-1) + 2 \end{pmatrix} \qquad (8) \\ &= \begin{pmatrix} 12(x+y)^2 - 2 & 12(x+y)^2 - 6 \\ 12(x+y)^2 - 6 & 12(x+y)^2 - 2 \end{pmatrix} \qquad (9) \end{aligned}$$

Wir unsere drei stationären Punkte ergibt das

$$D^2 f(0, 0) = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ -6 & -2 \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$D^2 f(\pm 0.5, \pm 0.5) = \begin{pmatrix} 10 & 6 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \tag{11}$$

Wir berechnen die Determinante von $D^2 f(0, 0)$, diese dafür gilt

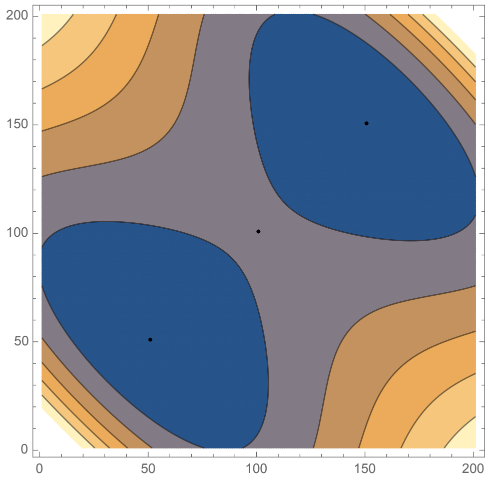
$$\det D^2 f(0, 0) = 4 - 36 = -32. \tag{12}$$

Aus der linearen Algebra wissen wir, dass die Determinante gleich dem Produkt der Eigenwert ist. Da die Determinante negativ ist, hat $D^2 f(0, 0)$ einen positiven und einen negativen Eigenwert. Damit ist $D^2 f(0, 0)$ indefinit und der stationäre Punkt $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Für $D^2 f_{(\pm 0.5, \pm 0.5)}$ ergibt Anwenden des Cholesky Algorithmus (Verfahren 2.51 im Skript), mit der Notation aus dem Skript $d_{1,1} = 10, d_{2,2} = 10 - \frac{6^2}{10} = 6.4, t_{1,2} = \frac{6}{10} = 0.6$. Damit ($d_{2,2}$ ist positiv) ist $D^2 f_{(\pm 0.5, \pm 0.5)}$ positiv definit und es ergibt sich

$$D^2 f_{(\pm 0.5, \pm 0.5)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0.6 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 6.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0.6 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

Die beiden stationären Punkte $(\pm 0.5, \pm 0.5)$ sind also jeweils lokale Minima. Für eine Zeichnung der Konturen siehe



b) Es sind die Stationären Punkte der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2(x+y)^3-3(x+y)^2+y^2$ zu finden und zu charakterisieren. Wir berechnen zuerst den Gradienten:

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 6(x+y)^2 - 6(x+y) \\ 6(x+y)^2 - 6(x+y) + 2y \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Dieser verschwindet genau dann wenn das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 6(x+y)^2 - 6(x+y) &= 0 \\ 6(x+y)^2 - 6(x+y) + 2y &= 0 \end{aligned}$$

erfüllt ist. Abziehen der Gleichungen liefert die Bedingung $y = 0$. Einsetzen in die verbleibende Gleichung ergibt

$$6x^2 - 6x = 0 \iff (x = 0 \vee x = 1). \tag{15}$$

Nun berechnen wir die Hessematrix

$$D^2 f = \begin{pmatrix} 12(x+y) - 6 & 12(x+y) - 6 \\ 12(x+y) - 6 & 12(x+y) - 4 \end{pmatrix}, \tag{16}$$

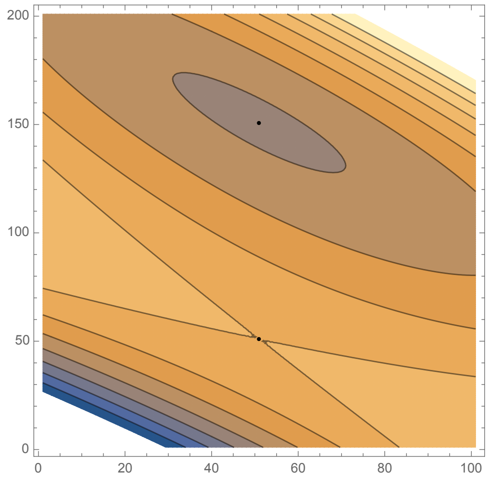
ausgewertet an den stationären Punkten ergibt das

$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -6 & -6 \\ -6 & -4 \end{pmatrix} \tag{17}$$

und

$$D^2 f(0,2) = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Die Determinanten der ersten Hessematrizen ist gleich -12, damit ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt. Das Cholesky Verfahren für die Hessematrix bei $(1, 0)$ ergibt, dass diese positiv definit ist, genau dann wenn $\left(8 - \frac{6 \cdot 6}{6}\right) = (2)$ positiv definit ist. Der Punkt $(1, 0)$ ist also ein Minimum. Für eine Zeichnung der Konturen siehe



c) Nun diskutieren wir die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \text{Re } \cos(x + iy)$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \text{Im } \cos(x + iy).$$

Zu Beginn formulieren wir die beiden Funktionen um. Es folgt für $x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\text{Re } \cos(x+iy) = \frac{1}{2}\text{Re}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right) &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[e^{ix-y} + e^{-ix+y} + \overline{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2}\left[e^{ix-y} + e^{-ix+y} + e^{-ix-y} + e^{ix+y}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[e^{-y}\cos x + e^{+y}\cos x\right] = \cos x \cosh y\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}\text{Im } \cos(x+iy) &= \frac{1}{2}\text{Im}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y}\right) = \frac{1}{2}\frac{1}{2i}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y} - \left(\overline{e^{ix-y} + e^{-ix+y}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{1}{2i}\left(e^{ix-y} + e^{-ix+y} - e^{-ix-y} - e^{ix+y}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{-y}\sin x - e^{+y}\sin x\right) \\ &= -\sinh y \sin x.\end{aligned}$$

Die Gradienten der Funktionen sind

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} -\sin x \cosh y \\ \cos x \sinh y \end{pmatrix}, \qquad \nabla g(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x \sinh y \\ -\sin x \cosh y \end{pmatrix}, \tag{19}$$

Die Bedingung $\nabla f(x, y) = 0$ ist gleichbedeutend mit

$$\begin{aligned}&\sin x \cosh y = 0 \wedge \cos x \sinh y = 0 \\ \iff \exists n, k \in \mathbb{Z} : &\left[x = n\pi \wedge \left((y = 0 \vee x = \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi\right)\right] \\ &\iff \exists n \in \mathbb{Z} : (y = 0 \wedge x = n\pi).\end{aligned}$$

Es gibt also stationäre Punkte bei $y = 0$ und $x = n\pi$ für alle $n \in \mathbb{Z}$. Wir stellen daher die Hessematrix auf

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} -\cos x \cosh y & -\sin x \sinh y \\ -\sin x \sinh y & \cos x \cosh y \end{pmatrix}, \tag{20}$$

wenn man die stationären Punkte einsetzt ergibt das (unter Beachtung von $\cos(n\pi) = (-1)^n$)

$$D^2 f(n\pi, 0) = \begin{pmatrix} -(-1)^n & 0 \\ 0 & (-1)^n \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Wir können also ablesen, dass die stationären Punkte Sattelpunkte sind. Nullsetzen des Gradienten von g liefert

$$\cos x \sinh y = 0$$
$$\sin x \cosh y = 0,$$

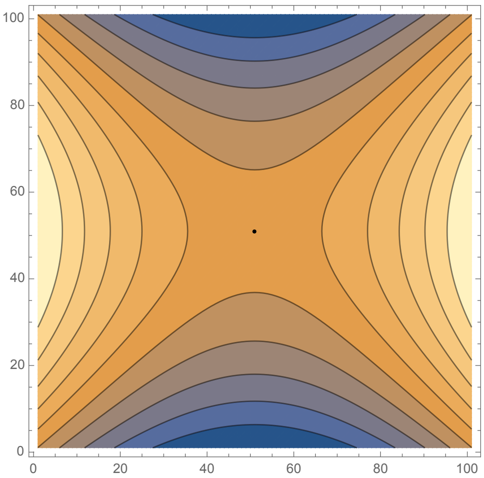
Die gleichen Umformungen wie schon im ersten Fall führen wieder zu $y = 0$ und $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$. Die Hessematrix für g ist

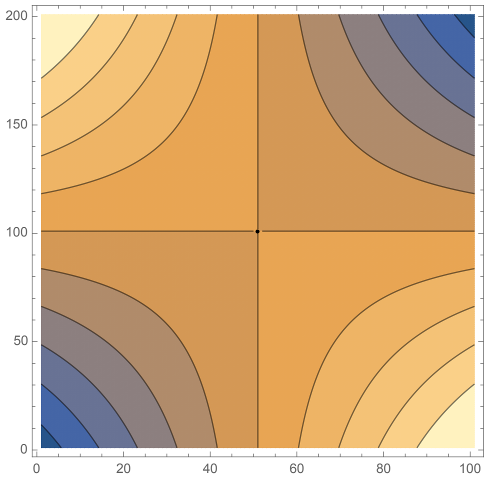
$$D^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} \sin x \sinh y & -\cos x \cosh y \\ -\cos x \cosh y & -\sin x \sinh y \end{pmatrix}, \tag{22}$$

und einsetzen der stationären Punkte ergibt

$$D^2 g(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & -(-1)^n \\ -(-1)^n & 0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Die Determinante dieser Matrix ist gleich -1, was bedeutet, dass auch g nur Sattelpunkte und keine Extrema hat. Die Konturen sind in den folgenden Graphiken zu sehen (zuerst f dann g). Dabei ist zu beachten, dass die Konturen entlang denen f konstant bleibt und welche den stationären Punkt schneiden die Richtung des schnellsten Anstiegs bzw. Abfalls von g sind und umgekehrt.





Aufgabe 3

a) Sei $n, k \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Wir sollen die Ableitung von $f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, A \mapsto A^k$ finden. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Wir verwenden dabei die Formel aus dem Skript (zur Eindeutigkeit der Ableitung $\mathrm{d}f_x$)

$$\mathrm{d}f_A(B) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(f(A+tB) - f(A)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\left((A+tB)^k - A^k\right). \tag{24}$$

Die Potenz von $(A+tB)$ ist eine lange Summe bei der sich die Summanden dadurch unterscheiden ob der $l-$te Faktor A oder tB ist. Es gibt insgesamt 2^k Summanden, wovon einer A^k ist und der Rest mindestens einen Faktor von tB enthält. Damit lässt sich $\mathrm{d}f$ so umschreiben:

$$\mathrm{d}f_A(B) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \sum_{l\in\{0,1\}^k \setminus \{(0,\ldots,0)\}} \prod_{a=1}^{k} (\delta_{l_a,0} A + \delta_{l_a,1} tB)$$
$$= \lim_{t\to 0} \sum_{l\in\{0,1\}^k \setminus \{(0,\ldots,0)\}} t^{-1+\sum_{b=1}^k l_b} \prod_{a=1}^{k} (\delta_{l_a,0} A + \delta_{l_a,1} B).$$

Der Exponent von t unter der Summe ist immer mindestens 0. Alle Summanden bei denen dieser Exponent größer ist als 0 ist verschwinden im Limes, die verbleibenden Summanden sind jedoch genau die Terme bei denen der Faktor B nur einmal auftaucht. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}f_A(B) &= \lim_{t\to 0} \sum_{\substack{l\in\{0,1\}^k\setminus\{(0,\dots,0)\}\\ \exists! b\in\{1,\dots,n\}: l_b=1}} \prod_{a=1}^{k} (\delta_{l_a,0}A + \delta_{l_a,1}B) \\
&= \sum_{c=1}^{k} \left(\prod_{a=1}^{c-1} A\right) B \prod_{b=c+1}^{k} A = \sum_{c=1}^{k} A^{c-1}BA^{k-c}.
\end{aligned}$$

b) Sei U wie in der Aufgabenstellung und $A \in U$ gegeben. Für die Konvergenz von

$$\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \tag{25}$$

in $\|\cdot\|_{C^1}$ müssen wir zeigen, dass

$$\sup_{B\in U} \left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k B \right\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}} \tag{26}$$

für $N \to \infty$ konvergiert und ebenso

$$\sup_{B\in U} \left\| \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{c=1}^{k} A^{c-1}BA^{k-c} \right\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}} \tag{27}$$

für $N \to \infty$ konvergiert (dabei wurde Teilaufgabe a) verwendet). Sei dafür $B \in U$ gegeben. Zudem gilt für alle $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$

$$\|Z\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}} = \|Z\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}, \tag{28}$$

wir beweisen nur einen der beiden Fälle, der Zweite geht analog. Sei dafür $Z \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Es gilt einerseits unter Verwendung von Submultiplikativität der Operatornorm

$$\begin{aligned}
\|Z\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}} &= \sup_{\substack{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\\ \|B\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}} \|ZB\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \\
&\leq \sup_{\substack{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\\ \|B\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}} \|Z^T\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \|B\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} = \|Z\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}
\end{aligned}$$

und andererseits

$$\|Z^T\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}} = \sup_{\substack{B\in\mathbb{R}^{n\times n}\\ \|B\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}}} \|Z^TB\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} \geq \|Z^T\mathbb{1}\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n} = \|Z^T\|_{\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n}.$$

Nun kommen wir zur Abschätzung der Exponentialreihen, wir verwenden dabei dass diese Reihe auf ganz $\mathbb{R}$ konvergiert. Im folgenden wird die Operatornorm von $\mathbb{R}^n$ nach $\mathbb{R}^n$ durch $\|\cdot\|$ abgekürzt. Sei $N \in \mathbb{N}$ gegeben, dann gilt wiederum unter Verwendung der Submultiplikativität der Operatornorm

$$\begin{aligned}
\left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k B \right\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}} &= \left\| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k B \right\| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \left\|A^k B\right\| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} \|A\|^k \|B\| \leq e^{\|A\|} \|B\|.
\end{aligned}$$

Analog dazu führen wir die Abschätzung der Ableitung:

$$\left\|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{c=1}^{k}A^{c-1}BA^{k-c}\right\|_{\mathbb{R}^{n\times n}\to\mathbb{R}^{n\times n}}=\left\|\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{c=1}^{k}A^{c-1}BA^{k-c}\right\|\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{c=1}^{k}\left\|A^{c-1}BA^{k-c}\right\|$$
$$\leq\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{c=1}^{k}\|A\|^{c-1}\|B\|\|A\|^{k-c}=\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{k!}\sum_{c=1}^{k}\|A\|^{k-1}\|B\|=\sum_{k=1}^{N}\frac{k}{k!}\|A\|^{k-1}\|B\|$$
$$=\sum_{b=0}^{N}\frac{1}{b!}\|A\|^{b}\|B\|\leq\sum_{b=0}^{\infty}\frac{1}{b!}\|A\|^{b}\|B\|=e^{\|A\|}\|B\|.$$

Die beiden fraglichen Reihen konvergieren also beide gleichmäßig.

c) Um die Behauptung der Aufgabe zu überprüfen führen wir zunächst das Integral aus. Dieses lässt sich zu

$$\int_0^1 e^{tA}Be^{(1-t)A}\mathrm{d}t=\int_0^1\sum_{a=0}^{\infty}\frac{t^a}{a!}A^aB\sum_{b=0}^{\infty}\frac{t^b}{b!}A^b\mathrm{d}t \tag{29}$$

$$\overset{\text{gleichm. Konvergenz}}{=}\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{1}{a!b!}A^aBA^b\int_0^1 t^a(1-t)^b\mathrm{d}t \tag{30}$$

umformen. Es gilt also dieses Integral zu lösen, wir erweitern zuerst die Obere Grenze zu einem allgemeinen $y\in\mathbb{R}$ und finden die rekursive Beschreibung

$$\forall c\in\mathbb{N}:\int_0^y(1-t)^c\mathrm{d}t=\frac{1}{c+1}(1-(1-y)^{c+1}) \tag{31}$$

$$\forall c,r\in\mathbb{N}:\int_0^y t^{r+1}(1-t)^c\mathrm{d}t=\frac{-1}{c+1}y^{r+1}(1-y)^{c+1}+\frac{r+1}{c+1}\int_0^y t^r(1-t)^{c+1}\mathrm{d}t. \tag{32}$$

Mit der Abkürzung $B_{a,b}(y):=\int_0^1 t^a(1-t)^b\mathrm{d}t$, für $a,b\in\mathbb{N}_0$ werden daraus

$$\forall c\in\mathbb{N}:B_{0,c}(y)=\frac{1}{c+1}(1-(1-y)^{c+1}) \tag{33}$$

$$\forall c,r\in\mathbb{N}:B_{r+1,c}(y)=\frac{-1}{c+1}y^{r+1}(1-y)^{c+1}+\frac{r+1}{c+1}B_{r,c+1}(y). \tag{34}$$

Damit findet man (mit einem leichten Induktionsbeweis) für $a,b\in\mathbb{N}_0$

$$B_{a,b}(y)=\sum_{k=0}^{a-1}y^{a-k}(1-y)^{b+k+1}\frac{\prod_{l=0}^{k-1}(a-l)}{\prod_{c=1}^{k+1}(b+c)}+\frac{a!b!}{(a+b+1)!}(1-(1-y)^{a+b+1}). \tag{35}$$

Für (30) benötigen wir $B_{a,b}(1)$, an diesem Punkt bleibt nur vom letzten Summanden der Vorfaktor übrig. Damit ergibt sich

$$\int_0^1 e^{tA}Be^{(1-t)A}\mathrm{d}t=\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\frac{1}{a!b!}A^aBA^b\frac{a!b!}{(a+b+1)!}. \tag{36}$$

Nun ordnen wir die Summe um um auf den Ausdruck aus b) zu kommen. Das Umordnen ist möglich, weil die Reihe absolut konvergiert. Wir setzen dabei $a+1=:c, a+b+1=s$, damit folgt

$$\int_0^1 e^{tA}Be^{(1-t)A}\mathrm{d}t=\sum_{s=1}^{\infty}\frac{1}{s!}\sum_{c=1}^{s}A^{c-1}BA^{s-c}=\mathrm{d}\exp_A(B). \tag{37}$$

Damit folgt insbesondere $\mathrm{d}\exp_{\mathrm{Id}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}^{n\times n}}$. □

Aufgabe 4

a) Seien $M, f, n \in \mathbb{N}$ und $s > 1$ wie in der Aufgabenstellung gegeben. Nach dem Satz von Schwarz vertauschen die Ableitungen von f, wir berechnen

$$-\int_n^{n+1}\int_n^s\int_1^s D_1D_2f(y,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_n^{n+1}\int_n^x (D_1f(y,s) - D_1f(y,1))\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

$$= -\int_n^{n+1}(f(x,s) - f(n,s) - f(x,1) + f(n,1))\mathrm{d}x = f(n,s) - f(n,1) + \int_n^{n+1}(f(x,1) - f(x,s)\mathrm{d}x.$$

Was zu zeigen war.

b) Nun setzen wir $f(x,s) = x^{-s}$ ein und erhalten auf der rechten Seite

$$f(n,s) - f(n,1) + \int_n^{n+1}(f(x,1) - f(x,s)\mathrm{d}x = n^{-s} - \int_n^{n+1} x^{-s}\mathrm{d}x - \frac{1}{n} + \int_n^{n+1} x^{-1}\mathrm{d}x$$
$$= n^{-s} - \frac{1}{1-s}\left((n+1)^{1-s} - n^{1-s}\right) - \frac{1}{n} + \log(n+1) - \log n$$

und auf der linken Seite

$$-\int_n^{n+1}\int_n^s\int_1^s D_1D_2f(y,t)\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}x = -\int_n^{n+1}\int_n^s\int_1^s (-1)D_y\log(y)y^{-t}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$
$$= \int_n^{n+1}\int_n^s\int_1^s y^{-t-1}(1 - t\log(y))\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}x$$

c) Seien $y \in [n, n+1]$ und $t \in [1,2]$ gegeben. Wir schätzen die beiden Faktoren unabhängig voneinander ab, es folgt

$$y^{-t-1} \overset{y\geq 1, t\leq 2}{\leq} y^{-2} \leq n^{-2}, \tag{38}$$

und mit der Dreiecksungleichung

$$|1 - t\log y| \leq 1 + t\log y \leq 1 + t\log(n+1) \leq 2 + 2\log(n+1). \tag{39}$$

Zusammengenommen ergibt das

$$\sup_{y\in[n,n+1]}\sup_{t\in[1,2]}\left|(1 - t\log y)y^{-t-1}\right| \leq 2(\log(n+1)+1)n^{-2}. \tag{40}$$

Für $1 < s \leq 2$ berechnen wir

$$\int_n^{n+1}\int_n^s\int_1^s 2(\log(n+1)+1)n^{-2}\mathrm{d}t\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_n^{n+1}(x-n)(s-1)2(\log(n+1)+1)n^{-2}\mathrm{d}x$$
$$= (s-1)2(\log(n+1)+1)n^{-2}.$$

Zusammen mit dem Ergebnis aus b) ergibt das

$$\left|n^{-s} - \frac{(n+1)^{1-s} - n^{1-s}}{1-s} - \frac{1}{n} + \log(n+1) - \log n\right| \leq (s-1)(\log(n+1)+1)n^{-2}. \tag{41}$$

d) Wir stellen zunächst fest, dass die folgenden Reihen konvergieren

$$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{(n)^{s-1}} = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\frac{1}{(n+1)^{s-1}} - \frac{1}{(n)^{s-1}}$$
$$= \lim_{N\to\infty}\left(\frac{1}{(N+1)^{s-1}} - 1\right) = -1,$$

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{n} - \log(n+1) + \log(n)\right) = \lim_{N\to\infty} \left(\left(\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}\right) - \log(N+1) + \log(1)\right) = \gamma,$$

wobei γ die Euler-Mascheroni Konstante ist.
Aus b) und c) folgt also

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \left(n^{-s} - \frac{1}{1-s}\left((n+1)^{1-s} - n^{1-s}\right) - \frac{1}{n} + \log(n+1) - \log n\right)$$
$$\leq (s-1) \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log(n)+1}{n^2} < \infty.$$

Wir erkennen die eben besprochenen Teilsummen wieder und schreiben mit $C := \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\log(n)+1}{n^2}$ um:

$$\zeta(s) + \frac{1}{1-s} - \gamma \leq (s-1)C. \tag{42}$$

Damit gilt

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + \gamma + O(s-1). \tag{43}$$

□