Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Wir orientieren uns an Beispiel 2.26 Teil 3. Daher berechnen wir

$$\frac{\partial}{\partial s} g(s,t)^{f(p,q)} = f(p,q) \cdot g(s,t)^{f(p,q)-1} \cdot \frac{\partial}{\partial s} g(s,t),$$
$$\frac{\partial}{\partial t} g(s,t)^{f(p,q)} = f(p,q) \cdot g(s,t)^{f(p,q)-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} g(s,t),$$

sowie

$$\frac{\partial}{\partial p} g(s,t)^{f(p,q)} = g(s,t)^{f(p,q)} \cdot \log(g(s,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f(p,q)$$

und

$$\frac{\partial}{\partial q} g(s,t)^{f(p,q)} = g(s,t)^{f(p,q)} \cdot \log(g(s,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial q} f(p,q).$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} g(s,t)^{f(s,t)} &= f(p,q) \cdot g(s,t)^{f(p,q)-1} \cdot \frac{\partial}{\partial s} g(s,t) + g(s,t)^{f(p,q)} \cdot \log(g(s,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial p} f(p,q)\bigg|_{p=s,q=t} \\ &= g(s,t)^{f(s,t)-1}\left(f(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial s} g(s,t) + g(s,t) \cdot \log(g(s,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial s} f(s,t)\right)\end{aligned}$$

und analog

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} g(s,t)^{f(s,t)} &= f(p,q) \cdot g(s,t)^{f(p,q)-1} \cdot \frac{\partial}{\partial t} g(s,t) + g(s,t)^{f(p,q)} \cdot \log(g(s,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial q} f(p,q)\bigg|_{p=s,q=t} \\ &= g(s,t)^{f(s,t)-1}\left(f(s,t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} g(s,t) + g(s,t) \cdot \log(g(s,t)) \cdot \frac{\partial}{\partial t} f(s,t)\right)\end{aligned}$$

Der Gradient von h ist also gegeben durch $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial s} g(s,t)^{f(s,t)} \\ \frac{\partial}{\partial t} g(s,t)^{f(s,t)} \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

(a) Siehe Skript Seite 90 Satz 1.192.

(b) Nach Parsevals-Gleichung erhalten wir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x = \langle f, f \rangle = \langle \mathcal{F}(f), \mathcal{F}(f) \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} |f_k|^2$$

wobei f_k die Fourierkoeffizienten von f sind. Diese berechnen sich wie folgt

$$f_k = \langle e_k, f \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x) \,\mathrm{d}x.$$

Somit haben wir schon mal

$$|f_0|^2 = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 .$$

Allgemein gilt für $k \neq 0$ mittels partieller Integration und da $e^{ikx} f(x)$ $2\pi-$periodisch ist

$$\begin{aligned} |f_k|^2 &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 = \left| \frac{1}{2\pi k} e^{-ikx} f(x) \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1}{k} e^{-ikx} f'(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 \\ &= \frac{1}{k^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 . \end{aligned}$$

Somit haben wir

$$\begin{aligned} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |f_k|^2 &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 \\ &\overset{f_0'=0}{=} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ikx} f'(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} |f_k'|^2 \overset{\text{Parseval}}{=} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Setzen wir also abschließend zusammen

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,\mathrm{d}x = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |f_k|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f'(x)|^2\,\mathrm{d}x + \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \right|^2 .$$

Aufgabe 3

Sei $g(x,y) = \arctan \frac{y}{x}$ und $f(r,\phi) = (r\cos\phi, r\sin\phi)$. Wir berechnen $f * dg$ auf folgende zwei Art und Weisen

(a) Wir haben $g \circ f(r,\phi) = \arctan(\tan\phi) = \phi$ und erhalten deswegen

$$(f * dg)_{(r,\phi)} = d(g \circ f)_{r,\phi} = d\phi.$$

(b) Wir berechnen zuerst dx und dy und setzen dann ein in

$$dg(x,y) = \frac{\partial}{\partial x} \arctan \frac{y}{x} dx + \frac{\partial}{\partial y} \arctan \frac{x}{y} dy = -\frac{y}{x^2+y^2} dx + \frac{x}{x^2+y^2} dy.$$

Aus der Koordinatentransformation erhalten wir $dx = \cos\phi dr - r\sin\phi d\phi$ und $dy = \sin\phi dr + r\cos\phi d\phi$. Dies gibt uns

$$f * dg_{r,\phi} = \frac{-\sin\phi}{r}(\cos\phi dr - r\sin\phi d\phi) + \frac{\cos\phi}{r}(\sin\phi dr + r\cos\phi d\phi) = d\phi$$

Das können wir auch in Matrix Schreibweise berechnen

$$Dg_{f(r,\phi)} Df_{(r,\phi)} = \begin{pmatrix} -\frac{\sin\phi}{r} & \frac{\cos\phi}{r} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

Aufgabe 4

(a) Siehe Skript Satz 2.24.

(b) Nach Definition 2.9 ist der Laplace Operator für beliebiges f gegeben durch:

$$\Delta f(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f(x)$$

Dafür berechnen wir für $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
Dh(x) &= D(f \circ g)(x) = Df(g(x)) \cdot Dg(x) \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial g_1} f(g_1, g_2)(x) & \frac{\partial}{\partial g_2} f(g_1, g_2)(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 & \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial g_1} f(g_1, g_2)(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} g_1 + \frac{\partial}{\partial g_2} f(g_1, g_2)(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_1} g_2 \\ \frac{\partial}{\partial g_1} f(g_1, g_2)(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} g_1 + \frac{\partial}{\partial g_2} f(g_1, g_2)(x) \cdot \frac{\partial}{\partial x_2} g_2 \end{pmatrix}^T = (d_1, d_2)
\end{aligned}$$

und

$$D^2 h(x) = D(d_1, d_2) = \begin{pmatrix} D_{x_1} d_1 & D_{x_1} d_2 \\ D_{x_2} d_1 & D_{x_2} d_2 \end{pmatrix}$$

wobei $D^2 h(x)$ eigentlich als Zeilenvektor von Zeilenvektoren zu verstehen ist, der Anschaulichkeit wegen schreiben wir es als Matrix. Δh ergibt sich dann aus $\Delta h = D_{x_1} d_1 + D_{x_2} d_2$. Berechnen wir also mit Hilfe der Kettenregel

$$\begin{aligned}
D_{x_1} d_1 &= D_{x_1}(D_{g_1} f \cdot D_{x_1} g_1 + D_{g_2} f \cdot D_{x_1} g_2) \\
&= D_{g_1}^2 f \cdot (D_{x_1} g_1)^2 + D_{g_1} D_{g_2} f \cdot D_{x_1} g_1 \cdot D_{x_1} g_2 + D_{g_1} f \cdot D_{x_1}^2 g_1 \\
&+ D_{g_1} D_{g_2} f \cdot D_{x_1} g_2 \cdot D_{x_1} g_1 + D_{g_2}^2 f \cdot (D_{x_1} g_2)^2 + D_{g_2} f \cdot D_{x_1}^2 g_2
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
D_{x_2} d_2 &= D_{x_2}(D_{g_1} f \cdot D_{x_2} g_1 + D_{g_2} f \cdot D_{x_2} g_2) \\
&= D_{g_1}^2 f \cdot (D_{x_2} g_1)^2 + D_{g_1} D_{g_2} f \cdot D_{x_2} g_1 \cdot D_{x_2} g_2 + D_{g_1} f \cdot D_{x_2}^2 g_1 \\
&+ D_{g_1} D_{g_2} f \cdot D_{x_2} g_1 \cdot D_{x_2} g_2 + D_{g_2}^2 f \cdot (D_{x_2} g_2)^2 + D_{g_2} f \cdot D_{x_2}^2 g_2 \\
&= D_{g_2}^2 f \cdot (D_{x_1} g_1)^2 - D_{g_1} D_{g_2} f \cdot D_{x_1} g_2 \cdot D_{x_1} g_1 - D_{g_1} f \cdot D_{x_1}^2 g_1 \\
&- D_{g_1} D_{g_2} f \cdot D_{x_1} g_2 \cdot D_{x_1} g_1 + D_{g_1}^2 f \cdot (D_{x_1} g_2)^2 - D_{g_2} f \cdot D_{x_1}^2 g_2
\end{aligned}$$

wobei in der letzte Gleichung die Eigenschaften $D_{x_1} g_1 = D_{x_2} g_2$ und $D_{x_1} g_2 = -D_{x_2} g_1$ verwendet wurden. Nun ist unter Verwendung von $\Delta f = 0$ offensichtlich $\Delta h = D_{x_2} d_2 + D_{x_1} d_1 = 0$.