Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Die ersten partiellen Ableitungen von $(a,b,c) \mapsto \int_a^b e^{-cx^2}\mathrm{d}x$ nach a, beziehungsweise b sind wie folgt gegeben

$$\frac{\partial}{\partial a}\int_a^b e^{-cx^2}\mathrm{d}x \overset{\text{Hauptsatz d. D. u. I.}}{=} -e^{-ca^2}$$
$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b e^{-cx^2}\mathrm{d}x \overset{\text{Hauptsatz d. D. u. I.}}{=} e^{-cb^2}.$$

Für die Ableitung nach c wollen wir H7.4a) aus Analysis 1 verwenden um Integral mit partieller Ableitung zu vertauschen. Alternativ kann man auch Stetigkeit in c zeigen und Lemma 2.7 aus dem Skript verwenden. Dafür muss der Differenzenquotient gleichmäßig gegen die Ableitung des Integranden konvergieren. Das ist also erst zu zeigen. Seien $a,b \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}^+$, $\varepsilon > 0$, $\min\left\{\frac{1}{c}, \frac{\varepsilon}{c+c^2e^{2b+\frac{1}{c}}}\right\} > h > 0$ und $x \in [a,b]$ gegeben. Dann gilt mit der Reihe der Exponentialfunktion (zweite Gleichheit), Abtrennen des ersten Summanden und Summationsindex verschieben(dritte Gleichheit)

$$\frac{e^{-c(x+h)^2}-e^{-cx^2}}{h} = e^{-cx^2}\frac{e^{-2cxh-ch^2}-1}{h} = e^{-cx^2}\sum_{l=1}^{\infty}(h)^{l-1}\frac{(-c(2x+h))^l}{l!} \tag{1}$$
$$= -2cxe^{-cx^2} - e^{-cx^2}ch + c^2he^{-cx^2}\sum_{l=0}^{\infty}(-ch)^l\frac{(2x+h)^{l+2}}{(l+2)!}. \tag{2}$$

Wir lesen also den ersten Summanden als Grenzwert ab und schätzen die Differenz unabhängig von x ab. Es ergibt sich mit der Dreiecksungleichung, der Abschätzung der Fakultät und der geometrischen Reihe

$$\left|\frac{e^{-c(x+h)^2}-e^{-cx^2}}{h} + 2cxe^{-cx^2}\right| \le ch + c^2h \sup_{y\in[a,b]}\sum_{l=0}^{\infty}(-ch)^l\left|\frac{(2y+h)^{l+2}}{(l+2)!}\right|$$
$$\overset{\forall k\in\mathbb{N}_0 \forall z\in\mathbb{R}: e^z \ge \frac{z^k}{k!}}{\le} ch + c^2h\sum_{l=0}^{\infty}(-ch)^l \sup_{y\in[a,b]} e^{2y+h} = ch + c^2h\frac{1}{1+ch}e^{2b+h}$$
$$\overset{ch<1, \exp \text{ steigt monoton}}{\le} ch + c^2he^{2b+\frac{1}{c}} < \varepsilon.$$

Der Differenzenquotient konvergiert also gleichmäßig, daher gilt

$$\frac{\partial}{\partial c}\int_a^b e^{-cx^2}\mathrm{d}x = \int_a^b \frac{\partial}{\partial c}e^{-cx^2}\mathrm{d}x = \int_a^b -2xce^{-cx^2}\mathrm{d}x. \tag{3}$$

Aufgabe 2

a) Siehe Skript Definition 2.14

b) Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Wir wählen die folgende Norm

$$\|\cdot\| : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}, A \mapsto \max_{k,l\in\{1,\dots n\}} |A_{k,l}|. \tag{4}$$

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gegeben. Aus der Definition von $\mathrm{d}f_A(B)$ folgt direkt (Skript)

$$0 = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t\|B\|}[f(A+tB) - f(A) - \mathrm{d}f_A(tB)] = \frac{1}{\|B\|} \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(A+tB) - f(A) - t\mathrm{d}f_A(B)], \tag{5}$$

also gilt $\mathrm{d}f_A(B) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[f(A+tB) - f(A)]$. Daraus ergibt sich für $f(A) = A^2$:

$$\mathrm{d}f_A(B) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[(A+tB)^2 - A^2] = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}[A^2 + tAB + tBA + t^2B^2 - A^2] \tag{6}$$

$$= \lim_{t\to 0}[AB + BA + tB^2] = AB + BA. \tag{7}$$

Aufgabe 3

Es sei $d \in \mathbb{N}$ und f wie in der Aufgabenstellung. Wir berechnen zuerst eine beliebige partielle Ableitung. Seien dafür $x \in \mathbb{R}^d$ und $i \in \{1, \dots n\}$ gegeben. Es folgen

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \|x\|_2^{2-d} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{\frac{2-d}{2}} = \left(1 - \frac{d}{2}\right) 2x_i \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}} \tag{8}$$

und

$$\frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} f(x) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(1 - \frac{d}{2}\right) 2x_i \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}} = \left(1 - \frac{d}{2}\right) 2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}} + \left(1 - \frac{d}{2}\right) \frac{-d}{2} 4x_i^2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}-1} \tag{9}$$

$$= \left(1 - \frac{d}{2}\right) 2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left(1 - \frac{d}{2}\right) d2x_i^2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}-1}. \tag{10}$$

Damit gilt insgesamt

$$\Delta f(x) = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial^2 x_i} f(x) = \sum_{i=1}^{d} \left(\left(1 - \frac{d}{2}\right) 2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left(1 - \frac{d}{2}\right) d2x_i^2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}-1} \right)$$

$$= d\left(1 - \frac{d}{2}\right) 2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}} - \left(1 - \frac{d}{2}\right) d2 \sum_{k=1}^{d} x_k^2 \left(\sum_{k=1}^{d} x_k^2\right)^{-\frac{d}{2}-1} = 0. \tag{11}$$

Aufgabe 4

Wie in der Aufgabenstellung ist $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$(r, \vartheta, \varphi) \mapsto (r \sin\vartheta \cos\varphi, r \sin\vartheta \sin\varphi, r\cos\vartheta). \tag{12}$$

Seine Jakobimatrix ist nach Lemma 2.17

$$Df(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} D_1 f_1 & D_2 f_1 & D_3 f_1 \\ D_1 f_2 & D_2 f_2 & D_3 f_2 \\ D_1 f_3 & D_2 f_3 & D_3 f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi \\ \cos\vartheta & -r\sin\vartheta & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

wobei mit $D_i f_k$ die Ableitung von f_k nach dem i-ten Argument gemeint ist.