Lösung zum Tutorium für Topologie und Differentialrechnung mehrerer Variablen
SS 2017

Aufgabe 1

Zuallererst sollte man sich die Definition der Metrik in Erinnerung rufen (Definition 1.1 im Skript).
Unser Modell lautet nun wie folgt:

(a) Sei S die Menge aller Städte und $K \subset S \times S$ die Menge aller Direktverbindungen zwischen den Städten, wobei für K gilt: $\forall\ s \in S\ \exists\ s' \in S : (s, s') \in K$.
Sei $J_{(s,s')} \subset S$ eine Menge von Städten $\{s_0, ..., s_{|J|}\}$ mit der Eigenschaft $s_0 = s, s_{|J|} = s'$ und $(s_i, s_{i+1}) \in K$ für alle $i < |J|$. Damit können wir jetzt d definieren

$$d(s, s') = \min_{J_{(s,s')} \subset S} \left\{ \sum_{i=0}^{|J|} t(s_i, s_{i+1}) \right\}.$$

Wobei $d(s, s) = 0\ \forall\ s \in S$. Dies müssen wir separat definieren da $(s, s) \notin K$ und somit $t(s, s)$ nicht definiert ist.

(b) Man kontrolliere die 5 Eigenschaften die eine Metrik definieren:

1. *Nicht-negativ*: Da $t(s, s') \geq 0$ für alle $(s, s') \in K$ ist auch

$$d(s, s') = \min_{J_{(s,s')} \subset S} \left\{ \sum_{i=0}^{|J|} t(s_i, s_{i+1}) \right\} \geq \min_{J_{(s,s')} \subset S} \{t(s_0, s_1)\} \geq 0.$$

2. *Symmetrie*: (angenommen $t(s, s') = t(s', s)\ \forall\ s, s' \in S$)
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $\exists s, s' \in S : d(s', s) > d(s, s')$, dann existiert $J = \{s_0, ..., s_{|J|}\} \subset S$:

$$d(s, s') = \sum_{i=0}^{|J|} t(s_i, s_{i+1}) \overset{j=|J|-i}{=} \sum_{j=0}^{|J|} t(s_j, s_{j+1}) \geq d(s', s) > d(s, s').$$

Somit haben wir in $d(s, s') > d(s, s')$ einen Widerspruch.

3. *Dreiecksungleichung*:
Beweis durch Widerspruch:
Angenommen $\exists s, p, q \in S : d(s, q) < d(s, p) + d(p, q)$: Widerspruch zur Minimalität von d. Da $d(s, q)$ als die kürzeste Verbindung von s nach q definiert ist.

4. *Selbstabstand Null*: offensichtlich nach Definition $d(s, s) = 0\ \forall s \in S$.

5. Sei $s, s' \in S$ mit $d(s, s') = 0$.
Es gilt $d(s, s') = \min_{J_{(s,s')} \subset S} \left\{ \sum_{i=0}^{|J|} t(s_i, s_{i+1}) \right\}$ oder $d(s, s') = 0$ für $s = s'$. Da $t(p, q) > 0\ \forall\ (p, q) \in K$ bleibt nur der Fall $d(s, s') = 0$ für $s = s'$.

Aufgabe 2

Zuallererst sollte man sich die Definition der Norm in Erinnerung rufen (Definition 1.3 im Skript). Wir wissen bereits, dass der Absolutbetrag $|\cdot|$ auf $\mathbb{K}$ eine Norm ist.

- $\|\cdot\|_1$: Wir überprüfen die 4 Eigenschaften einer Norm:
  1. *Nicht-negativ:* Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$. Da $|x_j| \geq 0$ für alle $j = 1, ..., n$ ist auch $\|x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| \geq 0$
  2. *Homogenität:* Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum ist, ist $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ und somit $\|\lambda x\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |\lambda x_j| = \sum\limits_{j=1}^{n} |\lambda||x_j| = |\lambda|\|x\|_1$. Wobei wir benutzen, dass $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ eine Norm ist.
  3. *Dreiecksungleichung:* Sei $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. Da $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum ist, ist $x+y = (x_1+y_1, ..., x_n+y_n)$. Somit haben wir $\|x+y\|_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |x_j+y_j| \geq \sum\limits_{j=1}^{n} (|x_j|+|y_j|) = \|x\|_1 + \|y\|_1$. Wobei wir wieder benutzen, dass $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ eine Norm ist.
  4. Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\|_1 = 0$. Dann ist auch $\sum\limits_{j=1}^{n} |x_j| = 0$ und somit $|x_j| = 0$ für alle $j \leq n$. Da $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ eine Norm ist, ist folglich $x_j = 0$ für alle $j \leq n$ und deswegen auch $x = (x_1, ..., x_n)$.
- $||\cdot||_\infty$ Wir überprüfen die 4 Eigenschaften einer Norm:
  1. *Nicht-negativ:* Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$. Da $|x_j| \geq 0$ für alle $j = 1, ..., n$ ist auch $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} \geq 0$.
  2. *Homogenität:* Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ und $\lambda \in \mathbb{K}$. Da $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum ist, ist $\lambda x = (\lambda x_1, ..., \lambda x_n)$ und somit $\|\lambda x\|_\infty = \max\{|\lambda x_1|, ..., |\lambda x_n|\} = \max\{|\lambda||x_1|, ..., |\lambda||x_n|\} = |\lambda|\|x\|_\infty$. Wobei wir benutzen, dass $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ eine Norm ist.
  3. *Dreiecksungleichung:* Sei $x = (x_1, ..., x_n), y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{K}^n$. Da $\mathbb{K}^n$ ein Vektorraum ist, ist $x + y = (x_1 + y_1, ..., x_n + y_n)$. Somit haben wir $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_1+y_1|, ..., |x_n+y_n|\} \leq \max\{|x_1|+|y_1|, ..., |x_n|+|y_n|\} \leq \max\{|x_1|, ..., |x_n|\} + \max\{|y_1|, ..., |y_n|\} = \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Wobei wir wieder benutzen, dass $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ eine Norm ist.
  4. Sei $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{K}^n$ mit $\|x\|_\infty = 0$. Dann ist auch $\max\{|x_1|, ..., |x_n|\} = 0$ und wegen $|x_j| \geq 0$ für alle $j \leq n$ somit auch $|x_j| = 0$ für alle $j \leq n$. Da $|\cdot|$ auf $\mathbb{R}$ eine Norm ist, ist folglich $x_j = 0$ für alle $j \leq n$ und deswegen auch $x = (x_1, ..., x_n)$.

Aufgabe 3

Zuallererst sollte man sich die Definition der p-adischen Metrik in Erinnerung rufen (Beispiel 1.3 im Skript).
Zuerst eine Beobachtung: $a_n = \sum\limits_{k=0}^{n} 9 \cdot 10^k = \underbrace{9...9}_{n+1 mal}$ und $a_n + 1 = 10^{n+1} = 5^{n+1} \cdot 2^{n+1}$.
$v_p(k)$ ist die Potenz mit der p in der Primfaktorzerlegung von k auftritt. Somit ist $v_5(a_n+1) = n + 1$. Mit diesen Überlegungen können wir nun $d_5(a_n, -1)$ berechnen:

$$d_5(a_n, -1) = 5^{-v_5(a_n+1)} = 5^{-(n+1)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Zum Vergleich $|a_n - (-1)| = |a_n + 1| = 10^{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Aufgabe 4

(a) Wir erinnern uns an die Additionsgesetze für Sinus und Kosinus. Für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ gilt:

- $\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)$

- $\cos(\alpha+\beta) = \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta)$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}
D(\alpha+\beta) &= \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) & -(\sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha)) \\ \sin(\alpha)\cos(\beta) + \sin(\beta)\cos(\alpha) & \cos(\alpha)\cos(\beta) - \sin(\alpha)\sin(\beta) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\beta) & -\sin(\beta) \\ \sin(\beta) & \cos(\beta) \end{pmatrix} = D(\alpha)D(\beta).
\end{aligned}$$

Aus $D(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ erhalten wir:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = D(0) = D(\alpha - \alpha) = D(\alpha)D(-\alpha)$$

und damit $D(\alpha)^{-1} = D(-\alpha)$.

(b) Wir berechnen

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}D(\omega t) = \frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \cos(\omega t) & -\sin(\omega t) \\ \sin(\omega t) & \cos(\omega t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -\omega\sin(\omega t) & -\omega\cos(\omega t) \\ \omega\cos(\omega t) & -\omega\sin(\omega t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) & -\omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) \\ \omega\sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) & \omega\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \omega D(\frac{\pi}{2})D(\omega t)
\end{aligned}$$

da $\cos(\omega t + \frac{\pi}{2}) = -\sin(\omega t), \sin(\omega t + \frac{\pi}{2}) = \cos(\omega)$ und weiter

$$\frac{d^2}{dt^2}D(\omega t) = \frac{d}{dt}(\omega D(\frac{\pi}{2})D(\omega t)) = \omega D(\frac{\pi}{2})\frac{d}{dt}D(\omega t) = \omega^2 D(\pi)D(\omega t) = -\omega^2 D(\omega t).$$

(c) Wir erinnern an die Kettenregel (siehe Skript Analysis 1). Wir berechnen nun

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) &= \frac{d^2}{dt^2}(D(-\omega t)x(t)) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d}{dt}(D(-\omega t))x(t) + D(-\omega t)\frac{d}{dt}(x(t))\right) \\
&= \frac{d^2}{dt^2}(D(-\omega t))x(t) + 2\frac{d}{dt}(D(-\omega t))\frac{d}{dt}(x(t)) + D(-\omega t)\frac{d^2}{dt^2}(x(t)).
\end{aligned}$$

Wir berechnen zuerst separat

$$\frac{d}{dt}(x(t)) = \frac{d}{dt}(D(\omega t)y(t)) = \omega D(\frac{\pi}{2})D(\omega t)y(t) + D(\omega t)\dot{y}(t).$$

Weiter

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(D(-\omega t))\frac{d}{dt}(x(t)) &= -\omega D(\frac{\pi}{2})D(-\omega t)\frac{d}{dt}(x(t)) \\
&= -\omega D(\frac{\pi}{2})D(-\omega t)(\omega D(\frac{\pi}{2})D(\omega t)y(t) + D(\omega t)\dot{y}(t)) \\
&= -\omega^2 D(\pi)D(0)y(t) - \omega D(\frac{\pi}{2})D(0)\dot{y}(t) \\
&= \omega^2 y(t) - \omega D(\frac{\pi}{2})\dot{y}(t).
\end{aligned}$$

Abschließend

$$\frac{d^2}{dt^2}(D(-\omega t))x(t) = -\omega^2 D(-\omega t)x(t) = -\omega^2 y(t).$$

unter Verwendung von (a) und (b). Nun kombinieren wir zum Schluss die verschiedenen Schritte.

$$\begin{aligned}
\ddot{y}(t) &= -\omega^2 y(t) + 2(\omega^2 y(t) - \omega D(\frac{\pi}{2})\dot{y}(t)) + D(-\omega t)\frac{d^2}{dt^2}(x(t)) \\
&= D(-\omega t)\ddot{x}(t) - 2\omega D(\frac{\pi}{2})\dot{y}(t) + \omega^2 y(t).
\end{aligned}$$