Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

a): Wir finden im Skript auf Seite 80:

Satz 1. *Es sei $(a_n^{(i)})_{n,i\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge, d.h. eine Folge von Folgen in $\mathbb{C}$. Wir nehmen an:*

1. *Für alle $i \in \mathbb{N}_0$ existiere $\lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}$ in $\mathbb{N}$.*
2. *Es existiere $b^{(i)} \geq 0$, für alle $i \in \mathbb{N}_0$, mit $\sum_{i=0}^{\infty} b^{(i)} < +\infty$, so dass für alle $n, i \in \mathbb{N}_0$ gilt: $|a_n^{(i)}| \leq b^{(i)}$.*

Dann existiert $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a^{(i)}$ in $\mathbb{C}$, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{\infty} a_n^{(i)} = \sum_{i=0}^{\infty} \lim_{n\to\infty} a_n^{(i)}. \tag{1}$$

b): Wir zeigen zuerst ein paar Hilfslemmata. Lemma 1 und Lemma 3 wurden schon in der Vorlesung gezeigt und sind somit nicht nötig für eine korrekte Lösung

Lemma 1. *Es gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$*

$$x \leq y \Rightarrow e^x \leq e^y \tag{Monotonie}$$

Beweis: Sei $x, y \in \mathbb{R}$ mit $x \leq y$, folglich gilt dann

$$e^{y-x} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y-x)^k}{k!} \geq 1, \tag{2}$$

aufgrund von $y \geq x$ und der Definition der Exponentialfunktion. Mit Satz 3.28 des Skriptes folgt dann $e^y \geq e^x$.

Lemma 2. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| \leq m+1$ gegeben. Es gilt*

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \leq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+2-x}. \tag{Fehlerabschätzung}$$

Beweis: Dieser erfolgt durch eine kurze Rechnung:

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{x^k}{k!} &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{l=0}^{k} \frac{x}{m+1+l} \leq \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(m+2)^k} \\ &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{x}{(m+2)}} = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+2-x}\end{aligned} \tag{3}$$

Lemma 3. *Die Exponentialfunktion ist stetig*

Beweis: Es ist zu zeigen, dass

$$\forall x \in \mathbb{R}\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : |x-y| < \delta \Rightarrow |e^x - e^y| < \varepsilon \tag{4}$$

gilt. Seien $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = \frac{2}{1+\frac{2}{\varepsilon}e^x} < 2$. Sei $y \in \mathbb{R}$ mit $|y-x| < \delta$ gegeben. Dann folgt für den Abstand der Funktionswerte

$$\begin{aligned}|e^x - e^y| &\overset{\text{Satz 3.28, VL}}{=} e^x|1-e^{y-x}| = e^x\left|-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(y-x)^k}{k!}\right| \le e^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|y-x|^k}{k!} < e^x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\delta^k}{k!} \\ &\overset{\text{Lemma 2}}{=} e^x\delta\frac{2}{2-\delta} = e^x\delta\frac{2}{2-\frac{2}{1+\frac{2}{\varepsilon}e^x}} = e^x\frac{2}{1+\frac{2}{\varepsilon}e^x}\frac{1+\frac{2}{\varepsilon}e^x}{\frac{2}{\varepsilon}e^x} = \varepsilon.\end{aligned} \tag{5}$$

Nun zur Aufgabe. Wir wollen also den Satz der dominierten Konvergenz für Reihen mit $a_n^{(i)} = \exp(-i + \frac{n}{i}e^{-\frac{n}{i}}), i, n \in \mathbb{N}$ anwenden. Die Bedingung 1. ist mit der Stetigkeit der Exponentialfunktion, Satz 3.31c) und Aufgabe T8.4 erfüllt . Wir wählen als Majorante

$$b^{(i)} = e^{-i+1}. \tag{6}$$

Aufgrund von Lemma 1 reicht es zu sehen, dass der Exponent von $b^{(i)}$ größer als der Exponent von $a_n^{(i)}$ für alle $i, n \in \mathbb{N}$ ist. Nach der Definition der Exponentialfunktion gilt aber

$$\frac{n}{i} \le \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{n}{i}\right)^k}{k!} = e^{\frac{n}{i}}, \tag{7}$$

woraus dies folgt. Weil die Folge $b^{(i)}$ auch summierbar ist, gilt auch die zweite Voraussetzung des Satzes. Insgesamt gilt damit

$$\begin{aligned}x &= \lim_{k\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-n+\frac{k}{n}e^{-\frac{k}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\lim_{k\to\infty}\exp\left(-n+\frac{k}{n}e^{-\frac{k}{n}}\right) \\ &\overset{\text{Lemma 3, Satz 3.31c)}}{=} \sum_{k=1}^{\infty}\exp\left(-n+\lim_{k\to\infty}\frac{k}{n}e^{-\frac{k}{n}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}e^{-n} \\ &= \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}e^{-n} = \frac{1}{e-1}.\end{aligned} \tag{8}$$

□

Aufgabe 2

Es sei $M \subseteq \mathbb{C}$, $f : M \to M$ stetig, $x_0 \in M$, $x_{n+1} := f(x_n)$, sodass es sein $x \in M$ gibt für welches $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt. Weil f stetig ist, ist es nach Satz 3.31c) der Vorlesung auch folgenstetig. Also gilt

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} f(x_{n-1}) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_{n-1}\right) = f\left(\lim_{k\to\infty} x_k\right) = f(x). \tag{9}$$

□

Aufgabe 3

Lemma 4. *Es gilt für alle Doppelfolgen $(a_{n,l})_{n,l\in\mathbb{N}_0} \subset [0,\infty]$ und $k \in \mathbb{N}_0$*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\inf_{l>k} a_{n,l} \le \inf_{l>k}\sum_{n=0}^{\infty} a_{n,l}. \tag{10}$$

Beweis: Für diesen Beweis ist wichtig, dass alle Grenzwerte aufgrund von Satz 3.22 existieren. Es gilt für alle $n, k \in \mathbb{N}_0$ und $L > k$

$$\inf_{l>k} a_{n,l} \leq a_{n,L}. \tag{11}$$

Also gilt auch

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 \forall L > k : \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \inf_{l>k} a_{n,l} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,L} \tag{12}$$

und damit auch

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \inf_{l>k} a_{n,l} \leq \inf_{l>k} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,l}. \tag{13}$$

□

a): Es sei $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0}$ eine Doppelfolge mit Werten in $[0, +\infty]$. Weil die Folge $(\inf_{l>k} a_{n,l})_{k\in\mathbb{N}_0}$ für alle n monoton steigend ist kann Satz 3.24 der Vorlesung angewendet werden. Daher gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \lim_{k\to\infty} \inf_{l>k} a_{n,l} = \lim_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \inf_{l>k} a_{n,l} \overset{\text{Lemma 4}}{\leq} \lim_{k\to\infty} \inf_{l>k} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,l}. \tag{14}$$

Schließlich kann man bei den Ausdrücken ganz links und ganz rechts $\lim_{k\to\infty} \inf_{l>k}$ mit $\liminf_{l\to\infty}$ ersetzen, die Ausdrücke jeweils in k monoton steigend sind, deshalb der Limes mit dem Supremum übereinstimmt und $\liminf_{k\to\infty} = \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \inf_{l>k}$ nach Aufgabe T6.3.

□

b): Es sei $(a_{n,k})_{n,k\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ eine Doppelfolge, sodass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ der Grenzwert $b_n = \lim_{k\to\infty} a_{n,k}$ in $\mathbb{C}$ existiert. Es gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} |b_n|^2 &= \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \lim_{k\to\infty} |a_{n,k}|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \liminf_{k\to\infty} |a_{n,k}|^2 \overset{\text{a)}}{\leq} \liminf_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,k}|^2 \\ &= \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \inf_{l>k} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,l}|^2 \leq \sup_{k\in\mathbb{N}_0} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} |a_{n,k}|^2\end{aligned} \tag{15}$$

□

c):

- Wir wählen $a_{1,k} = 1 + (-1)^k$, $a_{2,k} = 1 - (-1)^k$ und sonst $a_{n,k} = 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \liminf_{k\to\infty} a_{n,k} &= \liminf_{k\to\infty}(1 + (-1)^k) + \liminf_{k\to\infty}(1 - (-1)^k) = 0 < 2 \\ &= \liminf_{k\to\infty}(1 + (-1)^k + 1 - (-1)^k) = \liminf_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,k}\end{aligned} \tag{16}$$

- Wir wählen

$$a_{n,k} = \begin{cases} 8 & \text{für } n = k \\ 2^{-n} & \text{sonst.} \end{cases} \tag{17}$$

Dann gilt einerseits

$$2 = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} 2^{-n} = \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{k\to\infty} a_{n,k}. \tag{18}$$

Andererseits gilt

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,k} = \limsup_{k\to\infty}(2 - 2^{-k} + 8) = 10. \tag{19}$$

Für die erste Gleichheit wurde der große Umordnungssatz (Satz 3.27) verwendet. Also gilt insgesamt die geforderte Ungleichung.

– Für die letzte Ungleichung kann wieder das erste Beispiel dieser Teilaufgabe verwendet werden. Dann gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{n\in\mathbb{N}_0} \limsup_{k\to\infty} a_{n,k} &= \limsup_{k\to\infty}(1+(-1)^k) + \limsup_{k\to\infty}(1-(-1)^k) = 4 > 2 \\ &= \limsup_{k\to\infty}(1+(-1)^k + 1 - (-1)^k) = \limsup_{k\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}_0} a_{n,k}\end{aligned} \tag{20}$$

Aufgabe 4

a): Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, r, z, y wie in der Aufgabenstellung. Wir betrachten die folgende Reihe in den erweitert reellen Zahlen. Mit dem großen Umordnungssatz (Satz 3.27) und weil $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ den Konvergenzradius r hat gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\sum_{l\in\mathbb{N}_0}\binom{k+l}{k}|a_{k+l}y^l z^k| &= \sum_{s=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}|a_s||y|^{s-k}|z|^k = \sum_{s=0}^{\infty}|a_s|\sum_{k=0}^{s}\binom{s}{k}|y|^{s-k}|z|^k \\ &= \sum_{s=0}^{\infty}|a_s|(|y|+|z|)^s < \infty.\end{aligned} \tag{21}$$

b): Weil die in Teilaufgabe a) abgeschätzte Reihe konvergiert und die Summanden dieser Reihe der Absolutbetrag der Summanden von

$$\sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k \tag{22}$$

sind, konvergiert auch die Reihe (22). Nachdem dieser Schluss für alle $y, z \in \mathbb{C}$ mit $|z| + |y| < r$ gilt, hat die als Potenzreihe aufgefasste Reihe (22) mindestens den Konvergenzradius $r - |y|$. Mit den gleichen Rechenschritten wie in Teilaufgabe a) folgt dann

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} b_k z^k = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} a_k (z+y)^k. \tag{23}$$

□

Aufgabe 5

Lemma 5. *Es gilt die folgende Regel für das Ausmultiplizieren von mehreren Termen*

$$\forall n\in\mathbb{N}\ \forall p\in\mathbb{N}_0^n\ \forall (a_{k,j})_{k\in\mathbb{N},j\in\mathbb{N}_0}\subset\mathbb{C}: \prod_{k=1}^{n}\sum_{l=0}^{r_k} a_{k,l} = \sum_{\substack{l_1\in\{0,\dots,r_1\}\\ \vdots \\ l_n\in\{0,\dots r_n\}}} \prod_{k=1}^{n} a_{k,l_k}. \tag{mult}$$

Beweis: Wir Beweisen dieses Lemma über Induktion über n.

$(n = 1)$: Sei $(a_{1,j})_{j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ und $r_1 \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Es gilt

$$\prod_{k=1}^{1}\sum_{l=0}^{r_k} a_{k,l} = \sum_{l_1=0}^{r_1} a_{1,l} = \sum_{l_1=0}^{r_1}\prod_{k=1}^{1} a_{k,l_k}. \tag{24}$$

$(n \to n+1)$: Sei $n \in \mathbb{N}$, $r \in \mathbb{N}_0^{n+1}$ und $(a_{k,j})_{k\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{C}$ gegeben. Nehme an, dass die Induktionsvoraussetzung

$$\prod_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{r_k} a_{k,l} = \sum_{\substack{l_1 \in \{0,\dots,r_1\} \\ \vdots \\ l_n \in \{0,\dots r_n\}}} \prod_{k=1}^{n} a_{k,l_k} \tag{IV}$$

gelte. Dann gilt

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n+1} \sum_{l=0}^{r_k} a_{k,l} &= \left(\prod_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{r_k} a_{k,l}\right) \sum_{l_{n+1}=0}^{r_{n+1}} a_{n+1,l_{n+1}} = \sum_{l_{n+1}=0}^{r_{n+1}} \left(\prod_{k=1}^{n} \sum_{l=0}^{r_k} a_{k,l}\right) a_{n+1,l_{n+1}} \\ &\overset{\text{(IV)}}{=} \sum_{l_{n+1}=0}^{r_{n+1}} \sum_{\substack{l_1 \in \{0,\dots,r_1\} \\ \vdots \\ l_n \in \{0,\dots r_n\}}} \left(\prod_{k=1}^{n} a_{k,l_k}\right) a_{n+1,l_{n+1}} = \sum_{\substack{l_1 \in \{0,\dots,r_1\} \\ \vdots \\ l_{n+1} \in \{0,\dots r_{n+1}\}}} \prod_{k=1}^{n+1} a_{k,l_k}.\end{aligned} \tag{25}$$

□

a): Sei $v \in \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ und $\mathbb{R} \ni s > 1$. Nach Aufgabe T9.3 konvergiert die Reihe, welche die Riemannsche Zetafunktion definiert. Es bezeichne $j_{\max}$ den Index nach dem v konstant Null ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{a\in\mathbb{N}} \frac{1_{\{a\in M_v\}}}{a^s} &= \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} \frac{1_{\{\Pi(n)\in M_v\}}}{\Pi(n)^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}} 1_{\{\Pi(n)\in M_v\}} \prod_{j\in\mathbb{N}} p_j^{-n_j s} \\ &= \sum_{\substack{n_1 \in \{0,\dots,v_1\} \\ \vdots \\ n_{j_{\max}} \in \{0,\dots,v_{j_{\max}}\}}} 1_{\{\Pi(n)\in M_v\}} \prod_{j=1}^{j_{\max}} p_j^{-n_j s} \overset{\text{(mult)}}{=} \prod_{j=1}^{j_{\max}} \sum_{l=0}^{v_j} p_j^{-sl} \\ &= \prod_{j=1}^{j_{\max}} \frac{1-p_j^{-(v_j+1)s}}{1-p_j^{-s}} = \prod_{j\in\mathbb{N}} \frac{1-p_j^{-(v_j+1)s}}{1-p_j^{-s}}.\end{aligned} \tag{26}$$

b): Wir wählen $(v_u)_{u\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}_0^{(\mathbb{N})}$ mit

$$v_{u,r} = \begin{cases} u \text{ für } r \leq m \\ 0 \text{ sonst.} \end{cases} \tag{27}$$

Wir setzen dann für die in Teilaufgabe a) gezeigte Gleichung v_u für v ein. Die Gleichung erhält dann Gestalt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1_{\{n\in M_{v_u}\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^{m} \frac{1-p_j^{-(u+1)s}}{1-p_j^{-s}}. \tag{28}$$

Wir nehmen dann den Grenzwert dieser Gleichung, dieser existiert weil die rechte Seite der Gleichung ein endliches Produkt von Ausdrücken ist deren Grenzwert existiert. Es folgt

$$\lim_{u\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1_{\{n\in M_{v_u}\}}}{n^s} = \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-p_j^{-s}}. \tag{29}$$

Der Limes vertauscht dann mit der Reihe, weil für jedes $u \in \mathbb{N}$ die Reihe in Gleichung (29) uniform durch die Reihe ohne Indikatorfunktion beschränkt ist und diese absolut summierbar ist. Daher gilt mit dem Satz der dominierten Konvergenz

$$\prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-p_j^{-s}} = \lim_{u\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1_{\{n\in M_{v_u}\}}}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \lim_{u\to\infty} \frac{1_{\{n\in M_{v_u}\}}}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1_{\{n\in L_m\}}}{n^s}. \tag{30}$$

□

c): Für diese Teilaufgabe stellen wir fest, dass alle Summanden der rechten Reihe in (30) monoton in m steigen. Wir können daher den Satz der monotonen Konvergenz anwenden und erhalten

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{\infty} \frac{1}{1-p_j^{-s}} = \lim_{m\to\infty} \prod_{j=1}^{m} \frac{1}{1-p_j^{-s}} &= \lim_{m\to\infty} \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1_{\{n\in L_m\}}}{n^s} \\ &= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lim_{m\to\infty} \frac{1_{\{n\in L_m\}}}{n^s} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^s}.\end{aligned} \tag{31}$$

□