Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

## Aufgabe 1

Wir behaupten, die Reihe hat Konvergenzradius $\infty$. Sei dafür $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ und setze $a_n := \frac{x^n}{\sqrt{n!}}$. Wähle nun $N \in \mathbb{N}$ so, dass $\frac{|x|^2}{N} < 1$ und setze $M := \frac{|x|}{\sqrt{N}} < 1$. Wir beobachten nun, dass für $n \geq N$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{\sqrt{n+1}} < \frac{|x|}{\sqrt{N}} = M < 1,$$

womit die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium absolut konvergiert.

## Aufgabe 2

Sei $a \in \mathbb{R}$. Für $x = 0$ ist nichts zu zeigen, sei daher $x \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $|x| < 1$. Wähle $N \in \mathbb{N}$ groß genug, sodass $\frac{|a|+1}{N} < \frac{1}{2}(\frac{1}{|x|} - 1)$. Dies mit dem archimedischen Axiom möglich, da $1/|x| > 1$. Setze weiterhin $y := \frac{|x|+1}{2} < 1$. Sei nun $n > N$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\left|\binom{a}{n}x^n\right| &= \frac{|x|^n}{n!}\prod_{k=0}^{n-1}|a-k| = \frac{|x|^N}{N!}\prod_{k=0}^{N-1}|a-k| \cdot \prod_{k=N+1}^{n}\left(\left|\frac{a+1}{k} - 1\right||x|\right) \\
&< \left|\binom{a}{N}x^N\right| \cdot \prod_{k=N+1}^{n}|x|\left(\frac{|a|+1}{k} + 1\right) < \left|\binom{a}{N}x^N\right| \cdot \prod_{k=N+1}^{n}|x|\left(\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{|x|} - 1\Big) + 1\right) \\
&= \left|\binom{a}{N}x^N\right| \cdot \prod_{k=N+1}^{n}\frac{|x|+1}{2} = \left|\binom{a}{N}x^N\right| \cdot y^{n-N} = \left|\binom{a}{N} \cdot (x/y)^N\right| \cdot y^n.
\end{aligned}$$

Doch damit folgt mit dem Majorantenkriterium

$$\sum_{n=N}^{\infty}\left|\binom{a}{n}x^n\right| < \left|\binom{a}{N} \cdot (x/y)^N\right| \sum_{n=N}^{\infty} y^n < \infty,$$

weswegen die beiden Reihen $\sum_{n=N}^{\infty}\left|\binom{a}{n}x^n\right|$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{a}{n}x^n$ konvergieren.

## Aufgabe 3

(a) Aus dem Skript: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ heißt *Cauchyfolge*, wenn gilt

$$\forall \varepsilon > 0\, \exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall k > m\ \forall l > m : |a_k - a_l| < \varepsilon.$$

(b) Wir definieren

$$n(m) \xrightarrow{m\to\infty} +\infty \quad :\Longleftrightarrow \quad \forall M \in \mathbb{R}\, \exists K \in \mathbb{N}_0\ \forall m > K : n(m) > M.$$

(c) Wir definieren

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to\infty} b_m = c \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}_0\ \forall m > N : |b_m - c| < \varepsilon, \\
\lim_{n\to\infty} a_n = c \quad &:\Longleftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{N}_0\ \forall n > M : |b_n - c| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

(d) Nach (i.) und Satz 3.11 ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, es existiert also $\mathbb{C} \ni a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wir zeigen nun, dass $a = c$. In einem ersten Schritt finden wir eine Teilfolge von $(a_n)$, die auch eine Teilfolge von $(b_m)$ ist. Dies wiederum ist möglich, wenn wir eine streng monoton steigende Teilfolge von $(n(m))_{m\in\mathbb{N}}$ finden.

Wir setzen $k_0 = 0$ und definieren für $j \geq 0$ rekursiv $k_{j+1} = \min\{l > k_j : n(l) > n(k_j)\}$. Da $n(\cdot)$ nach (ii.) unbeschränkt ist, ist die Folge $(k_j)$ wohldefiniert und per Definiton streng monoton steigend. Ebenfalls per Definition gilt des Weiteren $n(k_j) < n(k_{j+1})$ für alle $j \geq 0$. Definieren wir also die Folge $(n'(j))$ als $n'(j) = n(k_j)$ für $j \in \mathbb{N}_0$, so ist $(n'(j))_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine streng monoton steigende Folge in $\mathbb{N}$. Folglich ist

$$(a_{n'(j)})_{j\in\mathbb{N}_0} = (a_{n(k_j)})_{j\in\mathbb{N}_0} \overset{\text{(iii.)}}{=} (b_{k_j})_{j\in\mathbb{N}_0}$$

eine Teilfolge von $(a_n)$ als auch eine Teilfolge von $(b_m)$. Als Teilfolge der konvergenten Folge $(b_m)$ wissen wir mit (iv.), dass $a_{n'(j)} \xrightarrow{j\to\infty} c$. Als Teilfolge der konvergenten Folge $(a_n)$ gilt jedoch ebenso $a_{n'(j)} \xrightarrow{j\to\infty} a$ und daher $c = \lim_{j\to\infty} a_{n'(j)} = a$.

## Aufgabe 4

(a) Für $n \in \mathbb{N}_0$ ist

$$2(a_{n+1} - b_{n+1}) = a_n - 2\sqrt{a_n b_n} + b_n = (\sqrt{a_n} - \sqrt{b_n})^2 \geq 0,$$

also folgt zusammen mit $a_0 \geq b_0$, dass $a_n \geq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Sei nun $n \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Dann gilt

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \overset{b_n \leq a_n}{\leq} \frac{2a_n}{2} = a_n, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \overset{a_n \geq b_n}{\geq} \sqrt{b_n^2} = b_n.$$

(b) Zuerst sei erwähnt, dass sich das Resultat aus T7.2 auf monoton fallende Folgen erweitern lässt, denn für eine monoton fallende Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist $(-c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton steigend. Da sowohl $(a_n)$ als auch $(b_n)$ monoton und beschränkt sind, konvergieren beide Folgen in $\mathbb{R}$ und es gibt $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} a, b_n \xrightarrow{n\to\infty} b$. Weiterhin ist $a \geq b$: Es ist $b = \sup_{n\in\mathbb{N}} b_n$ und da $b_m \leq a_n$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ ist jedes Folgenglied aus $(a_n)$ eine obere Schranke der Folge $(b_n)$.

Nehme nun also an, $a \neq b$ und damit $a = b + \Delta$ für ein $\Delta > 0$. Aufgrund der Konvergenz der Folge $(a_n)$ können wir $n$ groß genug wählen, sodass $a_n < a + \Delta/2$. Doch dann gilt

$$a \leq a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} < \frac{a + \Delta/2 + b}{2} = \frac{2a - \Delta/2}{2} = a - \frac{\Delta}{4} < a,$$

ein Widerspruch.

## Aufgabe 5

Sei $x \in \mathbb{C}$ mit $|x| < \min\{r_1, r_2\}$. Aufgrund der Wahl von $x$ konvergieren sowohl $g(x)$ wie auch $f(x)$. Wir zeigen, dass $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, womit $h(x)$ insbesondere konvergiert. Es ist

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \quad g(x) = \lim_{n\to\infty} g_n(x),$$

mit $f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} b_k x^k$. Mit Satz 3.4 gilt, dass $\lim_{n\to\infty} g_n(x) \cdot f_n(x)$ existiert und gleich $g(x) \cdot f(x)$ ist. Mit T7.4 folgt dann

$$g(x) \cdot f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \cdot g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{2n} \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} x^k = \lim_{n\to\infty} h_{2n}(x)$$

mit $h_n(x) = \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} x^k$. Die Teilfolge $(h_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert also gegen $h(x)$. Da jedoch $f(x)$ und $g(x)$ auch absolut konvergieren, konvergiert für die monoton steigende Folge $\tilde{h}_n(x) := \sum_{m=0}^{n} \sum_{k=0}^{m} |a_k b_{m-k} x^k|$ die Teilfolge $(\tilde{h}_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ und damit die gesamte Folge $(\tilde{h}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach dem Majorantenkriterium konvergiert dann jedoch auch $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und es muss $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = h(x) = \lim_{n\to\infty} h_{2n}(x)$ gelten.