Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt mit übereinstimmenden Limes superior und Limes inferior. Wir zeigen zunächst zwei Lemmata, dann folgt die Hauptaussage mit einer kurzen Rechnung.

Lemma 1. *Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, deren Limes inferior existiert, dann gilt*

$$\forall \delta > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m : \liminf_{k\to\infty} b_k - b_n \leq \delta.$$

Beweis des Lemmas: Sei $\delta > 0$. Nehme für einen Widerspruch an, dass

$$\forall m > 0\ \exists n > m : \sup_{g\in\mathbb{N}} \inf_{c\geq g} b_c - b_n > \delta \tag{1}$$

gilt. Man sieht unter Verwendung des Hinweises, dass dies das Gegenteil der zu zeigenden Aussage ist. Wir definieren die folgende Menge

$$I := \{m \in \mathbb{N} \mid \sup_{g\in\mathbb{N}} \inf_{c\geq g} b_c > \delta + b_m\}, \tag{2}$$

dann gilt nach der Annahme offenbar, dass diese unendlich viele Elemente hat. Das bedeutet aber insbesondere, dass

$$\forall d \in \mathbb{N} : \sup_{g\in\mathbb{N}} \inf_{c\geq g} b_c > \delta + \inf_{e\geq d} b_e \tag{3}$$

gilt, was die Gültigkeit von

$$\sup_{g\in\mathbb{N}} \inf_{c\geq g} b_c \geq \delta + \sup_{d\in\mathbb{N}} \inf_{e\geq d} b_e \tag{4}$$

impliziert. Die Ungleichung (4) steht aber offenbar im Widerspruch zu $\delta > 0$, also gilt das Lemma.

Lemma 2. *Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge, deren Limes superior existiert, dann gilt*

$$\forall \delta > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n > m : b_n - \limsup_{k\to\infty} b_k \leq \delta.$$

Beweis des Lemmas: Dieser Beweis geht analog zum letzten. Sei $\delta > 0$. Nehme für einen Widerspruch an, dass

$$\forall m > 0\ \exists n > m : b_n - \inf_{g\in\mathbb{N}} \sup_{c\geq g} b_c > \delta \tag{5}$$

gilt. Man sieht unter Verwendung des Hinweises, dass dies das Gegenteil der zu zeigenden Aussage ist. Wir definieren die folgende Menge

$$I := \{m \in \mathbb{N} \mid b_m > \delta + \inf_{g\in\mathbb{N}} \sup_{c\geq g} b_c\}, \tag{6}$$

dann gilt nach der Annahme offenbar, dass diese unendlich viele Elemente hat. Das bedeutet aber insbesondere, dass

$$\forall d \in \mathbb{N} : \sup_{e\geq d} b_e > \delta + \inf_{g\in\mathbb{N}} \sup_{c\geq g} b_c \tag{7}$$

gilt, was die Gültigkeit von

$$\inf_{d\in\mathbb{N}} \sup_{e\geq d} b_e \geq \delta + \inf_{g\in\mathbb{N}} \sup_{c\geq g} b_c \tag{8}$$

impliziert. Die Ungleichung (8) steht aber offenbar im Widerspruch zu $\delta > 0$, also gilt auch dieses Lemma.

Nun zur Aufgabe. Wir wollen zeigen, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ihren Limesinferior konvergiert. Sei $\varepsilon > 0$. Verwende die Lemmata 1 und 2 jeweils mit $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ und nenne die beiden in den Lemmata genannten Variablen m_1 und m_2. Sei $N \geq \max\{m_1, m_2\}$, dann gilt

$$a_N - \liminf_{k\to\infty} a_k = a_N - \limsup_{k\to\infty} a_k = a_N - \inf_{b\in\mathbb{N}} \sup_{c\geq b} a_c \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon \tag{9}$$

und

$$-(a_N - \liminf_{k\to\infty} a_k) = \liminf_{k\to\infty} a_k - a_N = \sup_{b\in\mathbb{N}} \inf_{c\geq b} a_c - a_N \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{10}$$

Damit gilt insgesamt $|a_N - \liminf_{k\to\infty} a_k| < \varepsilon$. $\square$

Aufgabe 2

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ definiert wie in der Aufgabenstellung. Wir stellen zunächst einmal fest, dass für alle $n \geq 1$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{2}{5}a_{n-1} + \frac{3}{5}a_n - a_n = -\frac{2}{5}(a_n - a_{n-1}) \tag{11}$$

gilt. Hieraus folgt für $N > 1$ (mit einem sehr leichten Induktionsbeweis) die Gültigkeit von

$$a_N = \left(-\frac{2}{5}\right)^{N-1}(a_1 - a_0) + a_{N-1}. \tag{12}$$

Dies impliziert jedoch (wieder mit einem sehr leichten Induktionsbeweis), dass

$$a_N = \sum_{k=1}^{N-1}\left(-\frac{2}{5}\right)^{k}(a_1 - a_0) + a_1 \tag{13}$$

gilt. Da aus der Vorlesung bekannt ist, dass die geometrische Reihe konvergiert und gegen welchen Wert sie konvergiert ergibt sich, dass die betrachtete Folge konvergiert und zwar gegen

$$\begin{aligned}\lim_{N\to\infty} a_N &= \left(-\frac{2}{5}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\left(-\frac{2}{5}\right)^{k}(a_1 - a_0) + a_1 = \left(-\frac{2}{5}\right)\frac{1}{1-(-\frac{2}{5})}(a_1 - a_0) + a_1 \\ &= \frac{-2}{7}(a_1 - a_0) + a_1 = \frac{5}{7}a_1 + \frac{2}{7}a_0.\end{aligned} \tag{14}$$

Aufgabe 3

Unsere Wahl der Intervallgrenzen ist für $n \in \mathbb{N}$

$$a_n := \frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor}{10^n} \wedge b_n := \frac{\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor + 1}{10^n}. \tag{15}$$

Die rationalen Intervalle enthalten sich, weil für alle $l \in \mathbb{N}$, $a_l \leq a_{l+1}$ und $b_{l+1} \leq b_l$ gilt. Das kann man so einsehen:

$a_l \leq a_{l+1}$: Wir zeigen zuerst Monotonie der Gaußklammer. Es gilt

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R} : y \geq x \Rightarrow \lfloor y\rfloor \geq \lfloor x\rfloor \tag{Mon}$$

Beweis: Seien $x, y \in \mathbb{R}$ mit $y \geq x$ gegeben. Unter Verwendung von Aufgabe H3.2 und T2.3c) lässt sich folgender Schluss ziehen

$$\begin{aligned} & y < \lfloor y\rfloor + 1 \\ \Rightarrow\ & x < \lfloor y\rfloor + 1 \\ \Rightarrow\ & \lfloor x\rfloor < \lfloor y\rfloor + 1 \\ \overset{\text{Aufgabe T2.3c)}}{\Rightarrow}\ & \lfloor x\rfloor \leq \lfloor y\rfloor. \end{aligned} \tag{16}$$

Außerdem gilt unter Verwendung der Eigenschaften der Gaußklammer für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor 10 \leq 10^n 10\sqrt{2}, \tag{17}$$

also mit der Monotonie der Gaußklammer auch

$$\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor 10 = \lfloor\lfloor 10^n\sqrt{2}\rfloor 10\rfloor \leq \lfloor 10^n 10\sqrt{2}\rfloor. \tag{18}$$

$b_{l+1} \leq b_l$: Ebenfalls aufgrund der (in H3.2 gezeigten) Eigenschaften gilt

$$\begin{aligned} &10^l\sqrt{2} < \lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor + 1 \\ \Rightarrow &10^{l+1}\sqrt{2} < \lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor 10 + 10 \\ \Rightarrow &\lfloor 10^{l+1}\sqrt{2}\rfloor < \lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor 10 + 10 \\ \Rightarrow &\lfloor 10^{l+1}\sqrt{2}\rfloor \leq \lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor 10 + 9. \end{aligned} \tag{19}$$

Die gewünschte Ungleichung erhalten wir dann aus der letzten Zeile von Ungleichung (19). Es gilt

$$\begin{aligned} &\frac{\lfloor 10^{l+1}\sqrt{2}\rfloor}{10^{l+1}} \leq \frac{\lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor 10 + 9}{10^{l+1}}, \\ &\frac{\lfloor 10^{l+1}\sqrt{2}\rfloor + 1}{10^{l+1}} \leq \frac{\lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor 10 + 10}{10^{l+1}}, \\ &b_{l+1} \leq \frac{\lfloor 10^l\sqrt{2}\rfloor + 1}{10^l} = b_l. \end{aligned} \tag{20}$$

Es bleibt noch zu zeigen, dass $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \emptyset$ gilt. Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass diese Menge nicht leer sei. Sei $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$. Also gilt $\forall n \in \mathbb{N} : x \in I_n$ und nach Konstruktion von I_n gilt daher auch

$$\forall n \in \mathbb{N} : |x - \sqrt{2}| \leq 10^{-n}. \tag{21}$$

Das kann aber nur gelten falls $x = \sqrt{2}$ gilt, was im Widerspruch dazu steht, dass $\sqrt{2}$ keine rationale Zahl ist und daher in keinem der Intervalle ist. □

Aufgabe 4

Sei eine Folge $(a_{m,n})_{m,n\in\mathbb{N}}$ wie in der Aufgabenstellung gegeben.

a): Wir beginnen mit der Existenz von $\lim_{n\to\infty}\lim_{m\to\infty} a_{m,n} = \lim_{n\to\infty} b_n$.

Wir zeigen, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Chauchyfolge. Sei also $\varepsilon > 0$. Wähle nun $M \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $n \in \mathbb{N}$, $|b_n - a_{M,n}| < \frac{\varepsilon}{5}$ gilt (möglich aufgrund der gleichmäßigen Konvergenz). Wähle dann $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|a_{M,l} - a_{M,p}| < \frac{\varepsilon}{5}$ für alle $l, p > N$ (Konvergenz von $a_{M,l}$). Dann gilt für alle $l, p > N$

$$|b_l - b_p| \leq |b_l - a_{M,l}| + |a_{M,l} - a_{M,p}| + |a_{M,p} - b_p| < \frac{3}{5}\varepsilon < \varepsilon. \tag{22}$$

Wir zeigen nun, dass $(\lim_{n\to\infty} a_{m,n})_{m\in\mathbb{N}}$ auch eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ so groß, dass für alle $Q \in \mathbb{N}, l, p > k : |a_{l,Q} - a_{p,Q}| < \frac{\varepsilon}{5}$ erfüllt ist (gleichmäßige Konvergenz im ersten Index). Sei außerdem $l, p > k$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass sowohl $|\lim_{n\to\infty} a_{l,n} - a_{l,N}| < \frac{\varepsilon}{5}$, also auch $|a_{p,N} - \lim_{n\to\infty} a_{p,n}| < \frac{\varepsilon}{5}$ gelten. Man kann N immer so groß wählen, weil die Konvergenz im zweiten Index sowohl für $a_{p,\cdot}$ als auch für $a_{l,\cdot}$ ein N_l, ein N_p liefert für welches die erste bzw. zweite der beiden Bedingungen erfüllt ist. Beide Bedingungen werden dann aber von $N := \max\{N_p, N_l\}$ erfüllt. Insgesamt gilt dann

$$|\lim_{n\to\infty} a_{l,n} - \lim_{n\to\infty} a_{p,n}| \leq |\lim_{n\to\infty} a_{l,n} - a_{l,N}| + |a_{l,N} - a_{p,N}| + |a_{p,N} - \lim_{n\to\infty} a_{p,n}| < \varepsilon. \tag{23}$$

Es ist noch zu zeigen, dass die Limiten auch übereinstimmen. Wir führen erst abkürzende Notation ein. Wir definieren

$$\begin{aligned} x &:= \lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} a_{m,n}, \\ y &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} a_{m,n} \text{ und} \\ x_m &:= \lim_{n\to\infty} a_{m,n}. \end{aligned} \tag{24}$$

Sei $\varepsilon > 0$. Sei weiter $k > 0$ so groß, dass $\forall n \in \mathbb{N}, \forall m > k : |a_{m,n} - b_n| < \frac{\varepsilon}{5}$ erfüllt ist und wähle außerdem $l > k$ so groß, dass $|x_l - x| < \frac{\varepsilon}{5}$ gilt. Sei $N \in \mathbb{N}$ so, dass $|b_N - y| < \frac{\varepsilon}{5}$ und $|x_l - a_{l,N}| < \frac{\varepsilon}{5}$ gilt. Dann ist $|b_N - a_{l,N}| < \frac{\varepsilon}{5}$ aufgrund von gleichmäßiger Konvergenz automatisch erfüllt. Es gilt dann insgesamt

$$\begin{aligned} |x - y| &\leq |x - b_N| + |b_N - y| \leq |x - a_{l,N}| + |a_{l,N} - b_N| + |b_N - y| \\ &\leq |x - x_l| + |x_l - a_{l,N}| + |a_{l,N} - b_N| + |b_N - y| < \frac{4}{5}\varepsilon < \varepsilon \end{aligned} \tag{25}$$

Es gilt also insgesamt

$$\forall \varepsilon > 0 : |x - y| < \varepsilon, \tag{26}$$

also stimmen die beiden Limiten überein. □

b): Ein Gegenbeispiel ist die Folge $(a_{m,n})_{k,n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$, mit

$$a_{k,n} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \tag{27}$$

Für diese Folge gilt offenbar

$$\lim_{k\to\infty} \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k = \lim_{k\to\infty} 1^k = 1 \neq 0 = \lim_{n\to\infty} 0 = \lim_{n\to\infty} \lim_{k\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^k. \tag{28}$$

Aufgabe 5

Wir folgen dem Tipp und finden im Skript die in der Zentralübung bewiesene Formel (Seite 30, Formeln (23) bis (25)). Es gilt für jedes $m \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=0}^{m} k^2 2^{-k} = f\left(m, 2, \frac{1}{2}\right), \tag{29}$$

wobei f für die relevanten Argumente wie folgt definiert ist

$$\begin{aligned} f\left(m, 0, \frac{1}{2}\right) &:= 2 - 2^{-m} \\ f\left(m, n, \frac{1}{2}\right) &:= -2(m+1)^n 2^{-(m+1)} + \sum_{l=0}^{n-1} \binom{n}{l} f\left(m, l, \frac{1}{2}\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Es ergibt sich damit also, dass

$$\begin{aligned} f\left(m, 1, \frac{1}{2}\right) &:= 2 - (m+2)2^{-m} \text{ und} \\ f\left(m, 2, \frac{1}{2}\right) &:= 6 - (m^2 + 4m + 6)2^{-m} \end{aligned} \tag{31}$$

gilt. Um den Grenzwert zu bestimmen (und dessen Existenz sicherzustellen) verwenden wir die Rechenregeln für Limiten und Aufgabe T6.1.
Es gilt insgesamt

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^2 2^{-k} = \lim_{m\to\infty}(6 - (m^2 + 4m + 6)2^{-m}) = 6. \tag{32}$$

$\square$

Aufgabe 6

Seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ gegeben. Der geforderte Beweis beinhaltet eine kurze Rechnung und einen Indexshift. Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} &= a_n b_n - a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k - \sum_{k=1}^{n} a_k b_{k-1} \\ &= a_n b_n - a_0 b_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} b_k \\ &= a_k b_k - a_0 b_0 - \sum_{k=0}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) b_k.\end{aligned} \tag{33}$$

$\square$

Aufgabe 7

Seien $a, b \in \mathbb{C}^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gegeben.

a): Mit der Notation von Aufgabe T4.4 und unter Verwendung von Aufgabe T4.4f ergibt sich

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(a), \mathcal{F}(b)\rangle = \sum_{l=0}^{n-1} \overline{\mathcal{F}(a)_l}\mathcal{F}(b)_l &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k} \overline{\omega_n^{lk}} a_k} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p} \overline{\omega_n^{lp}} b_p \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} \sum_{p=0}^{n-1} b_p \sum_{l=0}^{n-1} \omega_n^{lk} \overline{\omega_n^{lp}} = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} \sum_{p=0}^{n-1} b_p n \delta_{p,k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \overline{a_k} b_k.\end{aligned} \tag{34}$$

$\square$

b): Der Beweis dieser Teilaufgabe verläuft sehr ähnlich zu dem der letzten. Wir verwenden wieder Notation und Ergebnis von Aufgabe T4.4f und erhalten

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \hat{a}_k = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=0}^{n-1} \overline{\omega_n^{kp}} a_p &= \sum_{p=0}^{n-1} a_p \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \omega_n^{kl} \overline{\omega_n^{kp}} \\ &= \sum_{p=0}^{n-1} a_p \frac{1}{n} n \delta_{pl} = a_l.\end{aligned} \tag{35}$$

$\square$