Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

## Aufgabe 1

(a) Aus dem Skript: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{C}$ heißt konvergent gegen $b \in \mathbb{C}$, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists m \in \mathbb{N}_0 \; \forall n > m : |a_n - b| < \varepsilon.$$

(b) Es gilt

$$\left| \frac{\sqrt{n} - i}{\sqrt{n} + i} - 1 \right| = \left| \frac{-2i}{\sqrt{n} + i} \right| = 2 \left| \frac{1}{\sqrt{n} + i} \right| \leq 2 \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \right|.$$

Wir zeigen nun $\frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, was die Behauptung zeigt. Sei hierfür $\varepsilon > 0$ und wähle (mit dem Archimedischen Axiom) $m \in \mathbb{N}$ mit $m > \frac{1}{\varepsilon^2}$. Dann ist $\sqrt{m} > \frac{1}{\varepsilon}$ und damit $\frac{1}{\sqrt{m}} < \varepsilon$.

## Aufgabe 2

Wir setzen $C_0 := ]\frac{\sqrt{2}}{2}, 2[$ und $C_n := ]-1, \frac{\sqrt{2}}{2} - 1/n[$ für $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(C_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Überdeckung mit den gesuchten Eigenschaften:

- Per Definition ist $C_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ offen.
- Da $\frac{\sqrt{2}}{2} - 1/n \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\sqrt{2}}{2}$ gilt mit $C := \bigcup_{n\in\mathbb{N}_0} C_n$, dass $[0,1] \cap C = [0,1] \backslash \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$ und insbesondere $\mathbb{Q} \subseteq [0,1] \cap C$.
- Nehme nun an, es gäbe eine endliche Menge $\mathcal{I} \subset \mathbb{N}_0$, sodass $(C_j)_{j\in\mathcal{I}}$ ebenfalls eine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ ist. Sei $m = \max \mathcal{I}$. Wähle $\varepsilon := \frac{1}{4m}$ und $x = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2m}$. Per Konstruktion gilt dann

  $$\left( \bigcup_{j\in\mathcal{I}} C_j \right) \cap U_\varepsilon(x) = \emptyset.$$

  Da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, enthält $U_\varepsilon(x)$ jedoch auch rationale Zahlen. Damit kann $(C_j)_{j\in\mathcal{I}}$ keine Überdeckung von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ gewesen sein – ein Widerspruch.

*Bemerkung:* Statt $\frac{\sqrt{2}}{2}$ hätte auch eine beliebige andere irrationale Zahl in $[0,1]$ gewählt werden können.

## Aufgabe 3

(a) Wir zeigen zuerst mit Induktion über $n$, dass $\sqrt{2} \in [a_n, b_n]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Die Aussage ist klar für $n = 0$, da $1^1 < 2 < 2^2$. Wir nehmen also an, $\sqrt{2} \in [a_n, b_n]$ und unterscheiden zwei Fälle: Falls $c_n^2 \geq 2$, dann ist $c_n \geq \sqrt{2}$ und damit $\sqrt{2} \in [a_n, c_n] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$. Falls andererseits $c_n^2 < 2$, so folgt $c_n < \sqrt{2}$ und damit $\sqrt{2} \in [c_n, b_n] = [a_{n+1}, b_{n+1}]$.

Es gilt nun noch zu zeigen, dass kein anderes Element in $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$ enthalten ist. Eine wichtige Beobachtung hierfür ist, dass sich die Länge des Intervalles in jedem Schritt halbiert. Es gilt also

$$b_n - a_n = \frac{1}{2}(b_{n-1} - a_{n-1}) \overset{(*)}{=} \frac{1}{2^n}(b_0 - a_0) = \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n\to\infty} 0, \tag{1}$$

wobei (*) induktiv folgt. Nehme nun an, dass $\sqrt{2} \neq x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}}[a_n, b_n]$. Da $[a_n, b_n]$ per Konstruktion immer ein Intervall ist, muss dieses Intervall in jedem Schritt sowohl $x$ als auch $\sqrt{2}$ enthalten, also mindestens die Länge $|x - \sqrt{2}|$ besitzen. Dies steht jedoch im Widerspruch zu (1).

(b) Auch hier hilft die Beobachtung, dass sich die Intervalllänge in jedem Schritt halbiert, denn es gilt

$$|a_n - \sqrt{2}| \leq |a_n - b_n| = \frac{1}{2^n}.$$

Für $n \geq 10$ ist $2^n > 1000$ und damit $2^{-n} < 1/1000$. Also ist $n = 10$ hinreichend. Berechnungen ergeben $a_{10} = 181/128 = 1,4140625$.

## Aufgabe 4

(a) Es ist

$$\frac{\Delta_n^2}{2x_n} = \frac{x_n^2 - 2x_n\sqrt{a} + a}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{a}{2x_n} - \sqrt{a} = x_{n+1} - \sqrt{a} = \Delta_{n+1}.$$

(b) Per Konstruktion ist $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, womit $\Delta_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ als Quotient eines nichtnegativen und eines positiven Ausdrucks selbst nichtnegativ ist.

Weiterhin gilt

$$0 \leq \frac{\Delta_n}{x_n} = 1 - \frac{\sqrt{a}}{x_n} \leq 1, \tag{2}$$

was

$$\Delta_{n+1} = \frac{\Delta_n}{2} \cdot \frac{\Delta_n}{x_n} \leq \frac{\Delta_n}{2}$$

impliziert. Aus (2) folgt des Weiteren $\sqrt{a} \leq x_n$, was mit (a) direkt $\Delta_{n+1} \leq \Delta_n^2/(2\sqrt{a})$ ergibt. Es sei vermerkt, dass alle Schlüsse auch für $n = 0$ gelten, falls $\Delta_0 \geq 0$.

(c) Für $n \geq 2$ gilt

$$|x_n - \sqrt{a}| = x_n - \sqrt{a} = \Delta_n \leq \frac{1}{2}\Delta_{n-1} \leq \frac{1}{2^{n-1}}\Delta_1 \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

da $\Delta_1$ ein nur von $a$ und $b$ abhängiger Wert ist.

(d) Mit der Abschätzung aus (b) erhalten wir

$$\begin{aligned}\Delta_n \leq \frac{\Delta_{n-1}^2}{2\sqrt{2}} \leq \prod_{j=0}^{n-1}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^j} \Delta_0^n &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{\sum_{j=0}^{n-1} 2^j} \Delta_0^n \\ &= \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1} \Delta_0^n \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{2^n-1}.\end{aligned}$$

Der letzte Ausdruck ist beschränkt durch $10^{-6}$ falls $2^n - 1 > \frac{\log(10^{-6})}{\log((2\sqrt{2})^{-1})} = \frac{12\log 10}{\log 8}$, was für $n \geq 4$ der Fall ist. Berechnungen ergeben dafür den Wert $x_4 = 1,41421356237469$.

## Aufgabe 5

(a) Eine Menge $M \subseteq \mathbb{R}$ heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung $(C_j)_{j\in I}$ von $M$ eine endliche Teilüberdeckung besitzt.

(b) Sei $(C_j)_{j\in I}$ eine offene Überdeckung von $M$. Dann muss ein $k \in I$ existieren, sodass $0 \in C_k$. Da $C_k$ offen ist, existiert des Weiteren ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(0) \subseteq C_k$. Definiere nun

$$M_1 := \{0\} \cup \left\{ \frac{1}{m} \,\middle|\, m \in \mathbb{N}, m > \frac{1}{\varepsilon} \right\} \quad \text{sowie}$$
$$M_2 := M \backslash M_1 = \left\{ \frac{1}{m} \middle| m \in \mathbb{N}, m \leq \frac{1}{\varepsilon} \right\}.$$

Dann gilt $M_1 \subseteq U_\varepsilon(0) \subseteq C_k$ und $|M_2| < \infty$, es ist also $M_2$ eine Menge, die nur endlich viele Elemente enthält. Damit gibt es eine Index-Menge $E \subseteq I$ mit $|E| = |M_2|$, sodass $(C_j)_{j\in E}$ eine (endliche) Überdeckung von $M_2$ ist, denn: Da $M$ überdeckt ist, muss auch $M_2$ überdeckt sein und so existiert für jedes Element $x$ in $M_2$ mindestens ein Index $j(x)$, sodass $x \in C_{j(x)}$. Wir können also $E = \{j(x) \mid x \in M_2\}$ wählen.

Doch damit ist $(C_j)_{j\in(E\cup\{k\})}$ eine endliche Überdeckung von $M$, was die Aufgabe löst.

## Aufgabe 6

Wir finden rekursiv eine absteigende Folge $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (d.h. $K_{n+1} \subseteq K_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$) an kompakten Mengen, sodass $\emptyset \neq K_n \subseteq U_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Sei $x_1 \in U_1$ und $\varepsilon_1 > 0$, sodass $U_{\varepsilon_1}(x_1) \subseteq U_1$ – dies ist möglich, da $U_1$ nichtleer und offen ist. Definiere nun $K_1 := \overline{U_{\varepsilon_1/2}(x_1)}$, dann ist $K_1$ per Definition abgeschlossen, beschränkt und in $U_1$ enthalten.
Nehme nun für $n > 1$ an, $K_1 \supseteq \ldots \supseteq K_{n-1}$ sind schon definiert. Da $U_n$ dicht in $\mathbb{R}$ ist, muss

$$K_{n-1} \cap U_n \supseteq U_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1}) \cap U_n \neq \emptyset.$$

Wähle also $x_n$ als Element aus dem Inneren dieses Schnitts (der Schnitt der zwei offenen Mengen $U_{\varepsilon_{n-1}/2}(x_{n-1})$ und $U_n$ ist wieder offen, womit jeder enthaltene Punkt ein innerer Punkt ist), was uns die Existenz von $\varepsilon_n > 0$ garantiert, sodass $U_{\varepsilon_n}(x_n) \subseteq K_{n-1} \cap U_n$. Dann ist $K_n := \overline{U_{\varepsilon_n/2}(x_n)}$ wieder eine Menge mit den gewünschten Eigenschaften.
Mit Korollar 2.19 aus dem Skript gilt nun, dass der Durchschnitt der $K_n$ nichtleer ist, also

$$\emptyset \neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n,$$

was zu zeigen war.