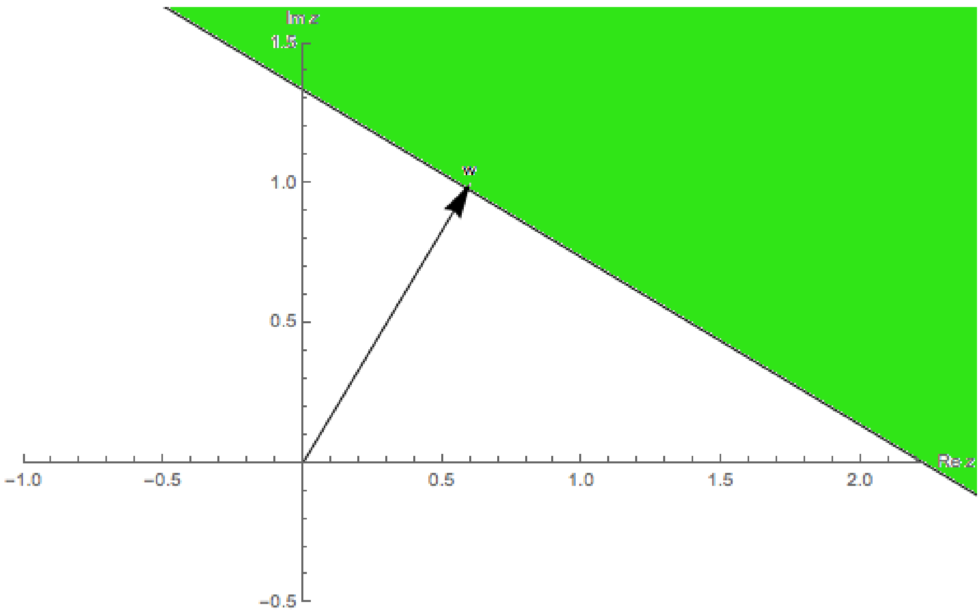
Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Zu dieser Aufgabe ist nichts abzugeben, was nicht bedeutet, dass sie unwichtig ist.

Aufgabe 2

a) Die Menge H ist in der folgenden Graphik beispielhaft für $w = 0.6 + i$ und $a = \frac{4}{3}$ grün markiert, der obere Teil des Pfeils gehört noch dazu, die Gerade jedoch nicht.



b) Sei $w \in \mathbb{C}\backslash\{0\}, a \in \mathbb{R}$ gegeben. Sei H wie in der Aufgabenstellung definiert. Um zu zeigen, dass H offen ist, finden wir für ein beliebiges Element von H eine offene Umgebung welche in H enthalten ist. Sei also $z \in H$ und $\alpha = \frac{\text{Re }(\overline{w}z)-a}{2|w|} > 0$. Dann gilt für jedes $x \in U_\alpha(z)$

$$\begin{aligned}\text{Re }(\overline{w}x) = \text{Re }(\overline{w}(x-z)) + \text{Re }(\overline{w}z) &\overset{\text{Cauchy-Schwarz-Ungl}}{\geq} \text{Re }(\overline{w}z) - |w||x-z| \\ &\geq \text{Re }(\overline{w}z) - |w|\alpha \geq \text{Re }(\overline{w}z) + \frac{a}{2} - \frac{\text{Re }(\overline{w}z)}{2} = \frac{a + \text{Re }(\overline{w}z)}{2} > a \qquad (1)\end{aligned}$$

Also ist $x \in H$ und damit auch $U_\alpha(z) \subseteq H$. □

Aufgabe 3

Sei $x \in \mathbb{R}$ und $M \subseteq \mathbb{R}$.

a) Zu zeigen ist:

$$\exists \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \subseteq M \iff \exists V \subseteq M : V \text{ ist eine offene Umgebung von } x. \qquad (2)$$

"$\Rightarrow$": Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq M$ gilt. Eine offene Umgebung, welche in M enthalten ist, ist $U_\varepsilon(x)$. $\square$

"$\Leftarrow$": Sei $V \subseteq M$ eine offene Umgebung von x, dann gibt es eine ε-Umgebung, welche in V enthalten ist. Sei also $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq V \subseteq M$ gilt. Dann ist x ein innerer Punkt von M. $\square$

b) Hier ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \iff \forall (V \text{ offene Umgebung von } x) : V \cap M \neq \emptyset. \tag{3}$$

"$\Rightarrow$": Nehme an, dass $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$ gilt. Sei V offene Umgebung von x, dann gibt es ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq V$. Nach Annahme gilt dann aber $\emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap M \subseteq V \cap M$. $\square$

"$\Leftarrow$": Nehme an, dass $\forall (V \text{ offene Umgebung von } x) : V \cap M \neq \emptyset$ gilt. Sei $\varepsilon > 0$, dann ist $U_\varepsilon(x)$ eine offene Umgebung von x, denn $U_\varepsilon(x)$ enthält x und ist offen. Daher gilt $U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset$. $\square$

c) Es ist zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}&\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash M) \\ &\qquad \iff \forall (V \text{ offene Umgebung von } x) : V \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq V \cap (\mathbb{R} \backslash M) \,.\end{aligned} \tag{4}$$

"$\Rightarrow$": Nehme an es gälte $\forall \varepsilon > 0 : U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash M)$. Sei V eine offene Umgebung von x, es gibt also ein $\varepsilon > 0$ mit $U_\varepsilon(x) \subseteq V$. Nach Vorraussetzung gilt:

$$U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash M) \Rightarrow V \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq V \cap (\mathbb{R} \backslash M) \,. \tag{5}$$

$\square$

"$\Leftarrow$": Nehme an es gälte $\forall (V \text{ offene Umgebung von } x) : V \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq V \cap (\mathbb{R} \backslash M)$. Sei $\varepsilon > 0$. Dann ist $U_\varepsilon(x)$ eine offene Umgebung von x, also gilt

$$U_\varepsilon(x) \cap M \neq \emptyset \wedge \emptyset \neq U_\varepsilon(x) \cap (\mathbb{R} \backslash M) \,. \tag{6}$$

$\square$

Aufgabe 4

Es sei $B := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und S^1 der Einheitskreis. Wir zeigen

$$\partial B = S^1 \tag{7}$$

Wir zeigen zuerst "$\supseteq$". Sei $y \in S^1$ und $\varepsilon > 0$. Wir können für ein $\phi \in [0, 2\pi[$ den Punkt y als $y = \cos(\phi) + i \sin(\phi)$ schreiben. Falls $\varepsilon \geq 1$ ist der Ursprung in $U_\varepsilon(y)$ und B enthalten. Für $\varepsilon < 1$ definieren wir den Punkt $z := \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi)$. Dieser ist ein Element von B und der ε-Umgebung $U_\varepsilon(y)$ von y, denn es gilt

$$|z| = \left|1 - \frac{\varepsilon}{2}\right| < 1 \tag{8}$$

und

$$|y - z| = \left|\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi)\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{9}$$

Wobei wir den Betrag einer komplexen Zahl in Polarkoordinaten abgelesen haben. Es gilt für jede komplexe Zahl w mit den Polarkoordinaten (m, ϕ) mit $r \in \mathbb{R}^+, \phi \in [0, 2\pi[$:

$$w = m \cos \phi + mi \sin \phi \wedge |w| = m. \tag{10}$$

Es gilt also $U_\varepsilon(y) \cap B \neq \emptyset$. Sei $x := \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \cos(\phi) + i \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \sin(\phi)$. Es gilt $x \in U_\varepsilon(y) \cap (\mathbb{C} \backslash B)$, denn es gilt

$$|x| = \left|\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos(\phi) + i\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(\phi)\right| = \left|1+\frac{\varepsilon}{2}\right| > 1 \tag{11}$$

und

$$|x-y| = \left|\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos(\phi) + i\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\sin(\phi)\right| = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{12}$$

Nun zum zweiten Teil "$\subseteq$": Sei $y \in \partial B$. Der Fall $y = 0$ kann ausgeschlossen werden, da $B = U_1(0)$ gilt und daher 0 ein innerer Punkt von B ist. Es ist zu zeigen, dass $y \in S^1$ gilt. Nach dem Skript lässt sich y wie folgt umschreiben. Es gibt $r \in \mathbb{R}^+, \phi \in [0, 2\pi[$ so, dass $y = r\cos(\phi) + ir\sin(\phi)$ gilt. Wir zeigen nun $r = 1$ durch Fallunterscheidung.

Fall 1 $r > 1$: Weil $y \in \partial B$ ist, gilt $U_{r-1}(y) \cap B \neq \emptyset$. Wähle also $x \in U_{r-1}(y) \cap B$; x lässt sich ebenfalls in Polarform schreiben als $x = k\cos(\alpha) + ik\sin(\alpha)$ mit $k \in [0, 1[, \alpha \in [0, 2\pi[$. Dann gilt

$$\begin{aligned} r-1 > |y-x| &= \sqrt{(r\cos\phi - k\cos\alpha)^2 + (r\sin\phi - k\sin\alpha)^2} \\ &= \sqrt{r^2+k^2-2rk\cos\phi\cos\alpha - 2rk\sin\phi\sin\alpha} = \sqrt{r^2+k^2-2rk\cos(\alpha-\phi)} \\ &\geq \sqrt{r^2+k^2-2kr} = |r-k| = r-k = r-1+1-k > r-1 \end{aligned} \tag{13}$$

Also gilt $r-1 > r-1$, was ein Widerspruch ist.

Fall 2 $r < 1$:Weil $y \in \partial B$ ist, gilt $U_{1-r}(y) \cap \mathbb{C}\backslash B \neq \emptyset$. Wähle also $x \in U_{1-r}(y) \cap \mathbb{C}\backslash B$; x lässt sich ebenfalls in Polarform schreiben als $x = k\cos(\alpha) + ik\sin(\alpha)$ mit $k \in]1, \infty[, \alpha \in [0, 2\pi[$. Dann gilt

$$\begin{aligned} 1-r > |y-x| &= \sqrt{(r\cos\phi - k\cos\alpha)^2 + (r\sin\phi - k\sin\alpha)^2} \\ &= \sqrt{r^2+k^2-2rk\cos\phi\cos\alpha - 2rk\sin\phi\sin\alpha} = \sqrt{r^2+k^2-2rk\cos(\alpha-\phi)} \\ &\geq \sqrt{r^2+k^2-2kr} = |r-k| = k-r = k-1+1-r > 1-r \end{aligned} \tag{14}$$

Also gilt $1-r > 1-r$, was ein Widerspruch ist.

Da Sowohl $r < 1$ als auch $r > 1$ zu einem Widerspruch führen muss also $r = 1$ gelten. Dies bedeutet $y \in S^1$. □

Aufgabe 5

Sei $V \subseteq \mathbb{C}$.

a) Der Beweis verläuft in zwei Schritten.

"$\Rightarrow$": Nehme an, V sei offen. Falls $V = \emptyset$ gilt gibt es nichts mehr zu zeigen. Sei also $x \in V$ beliebig. Dann ist zu zeigen, dass x kein Randpunkt von V ist. Weil V offen ist, ist x ein innerer Punkt von V. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(x) \subseteq V$ gilt. Nun haben alle ε-Umgebungen von Randpunkten von V nichtleeren Schnitt mit $\mathbb{C}\backslash V$. Weil $U_\varepsilon(x) \subseteq V$ und damit auch $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{C}\backslash V = \emptyset$ gilt, kann x also kein Randpunkt sein.

"$\Leftarrow$": Nehme an $V \cap \partial V = \emptyset$. Falls V leer ist, gibt es nichts zu zeigen. Nehme also an, $V \neq \emptyset$. Sei $x \in V$. Es ist noch zu zeigen, dass x ein innerer Punkt von V ist. Nehme für einen Widerspruch an, x sei kein innerer Punkt von V. Dann gibt es keine ε-Umgebung von x, die ganz in V enthalten ist. Sei $\varepsilon > 0$, dann gilt also $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{C}\backslash V \neq \emptyset$ und weil x offenbar in seiner eigenen ε-Umgebung enthalten ist gilt auch $U_\varepsilon(x) \cap V \neq \emptyset$. Also ist x ein Randpunkt von V. Das steht im Widerspruch zur Annahme. □

b) “$\Rightarrow$”: Nehme an V sei abgeschlossen, falls $\partial V = \emptyset$ gibt es nichts mehr zu zeigen. Sei daher $x \in \partial V$, dann ist x ein Berührpunkt von V. Also gilt $x \in \overline{V} = V$ und damit $\partial V \subseteq V$.

“$\Leftarrow$”: Nehme an $\partial V \subseteq V$. Falsl $V = \emptyset$ gilt, gibt es nichts mehr zu zeigen. Sei daher x ein Berührpunkt von V, dann ist x entweder ein innerer Punkt von V oder ein Randpunkt von V. Alle inneren Punkte von V sind aber Elemente von V und nach der Annahme gilt das auch für alle Randpunkte von V. Weil x beliebig war, gilt $\overline{V} \subseteq V$. $\square$

c) Falls $\partial V = \emptyset$ gilt gibt es nichts mehr zu zeigen. Sei daher $x \in \overline{\partial V}$. Sei $\varepsilon > 0$ und $y \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(x) \cap \partial V$ (Diese Menge ist nicht leer, weil x ein Berührpunkt von ∂V ist).

1. Sei $z \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(y) \cap V$ (Diese Menge ist nicht leer, weil y ein Randpunkt von V ist). Dann gilt $z \in V$ und $|x-z| \leq |x-y|+|y-z| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, also auch $U_\varepsilon(x) \cap V \neq \emptyset$.
2. Sei $w \in U_{\frac{\varepsilon}{3}}(y) \cap \mathbb{C}\backslash V$ (Diese Menge ist nicht leer, weil y ein Randpunkt von V ist). Dann gilt $w \in \mathbb{C}\backslash V$ und $|x-w| \leq |x-y| + |y-w| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon$, also auch $U_\varepsilon(x) \cap \mathbb{C}\backslash V \neq \emptyset$.

Also ist x im Rand von V, also $\overline{\partial V} \subseteq \partial V$. $\square$

Aufgabe 6

Sei $A \subseteq \mathbb{R}$ offen und abgeschlossen. Es ist zu zeigen, dass $A = \emptyset \vee A = \mathbb{R}$ gilt. Wir beweisen dies mit Widerspruch, nehme also an $A \neq \emptyset$ und $A \neq \mathbb{R}$. Aus Aufgabe H5.5 a) folgt $A \cap \partial A = \emptyset$ und aus H5.5b) folgt $A \cap \partial A = \partial A$, weil A sowohl offen als auch geschlossen ist. Die Menge A hat also keine Randpunkte. Sei $a \in A$ und $b \in \mathbb{R}\backslash A$. Es gilt daher entweder $b \in \partial A$ oder $b \in (\mathbb{R}\overset{\circ}{\backslash} A)$. Weil A keinen Rand hat, muss b also im Inneren von $\mathbb{R}\backslash A$ sein. Die Menge $\{k > 0 \mid U_k(b) \cap A = \emptyset\}$ ist also nicht leer und sie ist beschränkt, denn $a \in\subseteq U_m(b) \cap A$ für alle $m > |a-b|$. Wir definieren

$$l := \sup\{k > 0 \mid U_k(b) \cap A = \emptyset\}. \tag{15}$$

Nach Konstruktion gilt dann für jedes $\delta > 0$

$$\begin{aligned}&(U_\delta(b+l) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\delta(b+l) \cap \mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset)\\ \vee\, &(U_\delta(b-l) \cap A \neq \emptyset \wedge U_\delta(b-l) \cap \mathbb{R}\backslash A \neq \emptyset)\,.\end{aligned} \tag{16}$$

Daher gilt auch $\{b+l, b-l\} \cap \partial A \neq \emptyset$. Dies steht allerdings im Widerspruch zu $\partial A = \emptyset$.

Aufgabe 7

Sei $A \subseteq \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

“$\Rightarrow$”: Sei A offen. Die Menge $k[A]$ ist nach Definition offen, wenn für alle $x \in \mathbb{C} \cap k[A]$ gilt, dass sie innere Punkte sind und falls $\infty \in k[A]$ ist, so müssen alle genügen großen komplexen Zahlen Elemente von $k[A]$ sein.

- Sei $\infty \in A$. Zeige $k(\infty) = 0$ ist ein innerer Punkt von $k[A]$: Sei $r > 0$ sodass $\forall x \in \mathbb{C} : |x| > r \Rightarrow x \in A$ (solch ein r existiert, weil $\infty \in A$ und A offen ist). Dann gilt $U_{\frac{1}{r}}(0) \subseteq k[A]$, denn für $z \in U_{\frac{1}{r}}(0)\backslash\{0\}$ ist

$$z = \frac{1}{\frac{1}{z}} = k\left(\frac{1}{z}\right). \tag{17}$$

Weil $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} > \frac{1}{\frac{1}{r}} = r$ gilt, ist $\frac{1}{z} \in A$.

- Sei $x \in A\backslash\{0,\infty\}$. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, dass $U_\delta(x) \subseteq A$. Wir zeigen $U_{\frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}}(k(x)) \subseteq k\left[U_\delta(x)\right] \subseteq k[A]$. Sei $\left(\frac{1}{x}+z\right) \in U_{\frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}}(k(x))$, dann gilt $\frac{1}{x}+z = \frac{1}{\frac{x}{1+zx}} = k\left(\frac{x}{1+zx}\right)$. Der relevante Abstand ist dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{x}{1+zx}-x\right| = \left|\frac{x-x-zx^2}{1+zx}\right| = \frac{|z||x|^2}{|1+zx|} \overset{\square}{\leq} \frac{|z||x|^2}{1-|zx|}\\ < \frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}\frac{|x|^2}{1-\frac{\delta}{(|x|+\delta)}} = \frac{|x|\delta}{|x|+\delta-\delta} = \delta \quad (18)\end{aligned}$$

  Bei der mit $\square$ markierten Ungleichung muss man sich keine Sorgen machen ob durch 0 geteilt wird, denn es gilt

$$1-|zx| > 1-\frac{\delta}{|x|(|x|+\delta)}|x| = \frac{|x|+\delta-\delta}{|x|+\delta} = \frac{|x|}{|x|+\delta} > 0. \quad (19)$$

- Es gilt also $k\left[A\right] \cap \mathbb{C}$ ist offen in $\mathbb{C}$. Falls $0 \in A$, also $\infty \in k\left[A\right]$ muss noch gezeigt werden, dass alle im Betrage genügend großen komplexen Zahlen in $k\left[A\right]$ sind. Nehme an, $0 \in A$ gälte. Sei $\varepsilon > 0$ so, dass $U_\varepsilon(0) \subseteq A$ gilt. Sei $z \in \mathbb{C} : |z| > \frac{1}{\varepsilon}$. Dann folgt

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} < \varepsilon \text{ und } k\left(\frac{1}{z}\right) = z, \quad (20)$$

  also ist $z \in k\left[A\right]$. Also ist $k\left[A\right]$ offen. $\square$

“$\Leftarrow$”: Nehme an, $k\left[A\right]$ ist offen. Es ist zu zeigen, dass A offen ist. Für jedes $z \in \mathbb{C}\cup\{\infty\}$ gilt $k(k(z)) = z$, die Abbildung k ist also sein eigenes Inverses. Es gilt daher

$$\begin{aligned}k\left[A\right] = \{k(z) \in \mathbb{C}\cup\{\infty\} \mid z \in A\} = \{k^{-1}(z) \in \mathbb{C}\cup\{\infty\} \mid z \in A\}\\ = \{y \in \mathbb{C}\cup\{\infty\} \mid k(y) \in A\} = k^{-1}\left[A\right]. \quad (21)\end{aligned}$$

Also ist $k^{-1}\left[A\right]$ offen. Nun wissen wir aus dem ersten Teil des Beweises, dass die Bildmengen offener Mengen offen sind. Also ist auch $k\left[k^{-1}\left[A\right]\right] = A$ offen. $\square$