Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

## Aufgabe 1

(a) Wir nehmen für einen Widerspruch an, dass $(a,b)\cdot(c,d)=(0,0)$. Hieraus folgt

$$ac = bd, \quad ad = -bc. \tag{1}$$

Wir behaupten nun, dass $a,b,c,d \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Wir betrachten nur den Fall, dass $a=0$, da alle weiteren Fälle analog folgen. Angenommen also, $a=0$; dies impliziert $bd = 0 = bc$. Da jedoch $b \neq 0$ muss folglich $d = 0 = c$, was einen Widerspruch ergibt. Wir können also annehmen, dass $a,b,c,d \neq 0$.

Lösen wir (1) nun nach $a$ auf, so erhalten wir

$$\frac{bd}{c} = a = -\frac{bc}{d}.$$

Dies führt zu $bd^2 = -bc^2$. Abhängig vom Vorzeichen von $b$ ist die eine Seite der Gleichung nichtnegativ, die andere nichtpositiv. Gleichheit kann also nur herrschen, wenn beide Seiten 0 sind, was impliziert, dass mindestens einer der Werte $b,c,d$ den Wert 0 annimmt. Dies haben wir obenstehend jedoch ausgeschlossen, wir erhalten also einen Widerspruch.

(b) Seien $z,w,v \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $z=(a,b), w=(c,d), v=(e,f)$. Dann gilt

$$\begin{aligned}(z\cdot w)\cdot v &= ((ac-bd)e-(ad+bc)f, (ac-bd)f+(ad+bc)e)\\ &= (a(ce-df)-b(de+cf), a(cf+de)+b(ce-df))\\ &= (a,b)\cdot(ce-df, cf+de) = z\cdot(w\cdot v).\end{aligned}$$

(c) Für $z=(a,b)\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ gilt

$$(1,0)\cdot(a,b) = (1\cdot a - 0\cdot b, 1\cdot b + 0\cdot a) = (a,b).$$

(d) Es gilt

$$w\cdot z = \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{ab}{a^2+b^2} + \frac{-ba}{a^2+b^2}\right) = (1,0).$$

(e) Seien $z,w\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ mit $z=(a,b), w=(c,d)$. Dann gilt

$$z\cdot w = (ac-bd, ad+bc) = (ca-db, da+cd) = w\cdot z.$$

## Aufgabe 2

(a) "$\Rightarrow$" Sei $z \in S^1\backslash\{1\}$. Dann folgt

$$f(z) = i\cdot\frac{(z+1)^2}{(z-1)(z+1)} = i\cdot\frac{2+z+\overline{z}}{z-\overline{z}} = i\cdot\frac{2+2\,\mathrm{Re}\,z}{i2\,\mathrm{Im}\,z} = \frac{2+2\,\mathrm{Re}\,z}{2\,\mathrm{Im}\,z}\in\mathbb{R},$$

wobei verwendet wurde, dass $z\overline{z}=1$.

"$\Leftarrow$" Sei $z \neq 1$. Wir beobachten zuerst, dass die Aussage im Fall $f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -1 \in S^1$ wahr ist. Sei nun $0 \neq f(z) \in \mathbb{R}$. Daraus folgt, dass auch $1/f(z) \in \mathbb{R}$. Es gilt

$$\frac{1}{f(z)} = (-i) \cdot \frac{z-1}{z+1} = (-i) \cdot \frac{|z|^2 - 1 + i2 \operatorname{Im} z}{|z|^2 + 2 \operatorname{Re} z + 1}.$$

Da der Nenner reell ist, muss der Imaginärteil des Zählers 0 sein, damit der Gesamtausdruck reell ist. Dieser Imaginärteil ist jedoch $(1 - |z|^2)$, woraus $|z| = 1$ folgt und damit das zu Zeigende.

(b) Wir interpretieren $z - 1$ und $z + 1$ als die Vektoren, die 1 und $-1$ mit dem Punkt $z$ verbinden. Falls $z \in S^1 \backslash \{-1, 1\}$, so ist $f(z)$ reell, also $\frac{z+1}{z-1} = r(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ imaginär. Somit muss $\cos\varphi = 0$ gelten. Hieraus folgt $\varphi \in \{\pi/2, 3\pi/2\}$, jedoch ist $\varphi$ (bzw. sein Gegenwinkel) als die Differenz der Winkel $z + 1$ und $z - 1$ genau der Winkel bei $z$ im betrachteten Dreieck. Der andere Teil der Aussage (aus einem rechten Winkel an $z$ folgt, dass $z \in S^1 \backslash \{-1, 1\}$) folgt mit denselben Argumenten in umgekehrter Reihenfolge.

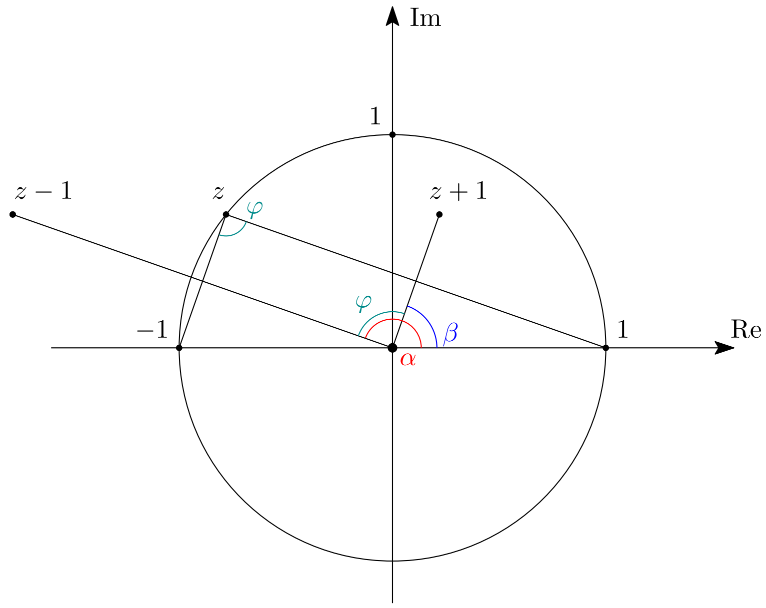



Abbildung 1: Illustration des Satzes von Thales. Als Quotient der Zahlen $z + 1$ und $z - 1$ ist $\varphi$ (bzw. dessen Gegenwinkel) genau die Differenz von $\alpha$ und $\beta$.

## Aufgabe 3

Es sei $w = c + id$ eine Lösung der Gleichung $w^2 = z$. Es gilt also (i) $a = c^2 - d^2$ und (ii) $b = 2cd$. Wir unterscheiden die folgenden Fälle:

$\boxed{1\text{: } a > 0, b = 0.}$ Aus (ii) folgt, dass $c = 0 \vee d = 0$, aus (i) ergibt sich, dass $d = 0$ und $c = \pm\sqrt{a}$. Die beiden Lösungen sind also $(\pm\sqrt{a}, 0)$.

$\boxed{2\text{: } a < 0, b = 0.}$ Im Gegensatz zu Fall 1 muss diesmal $c = 0$ und $d = \pm\sqrt{-a}$. Die beiden Lösungen sind also $(0, \pm\sqrt{-a})$.

$\boxed{3\text{: } b \neq 0.}$ Gleichung (ii) liefert $c \neq 0 \neq d$ und außerdem $c = b/2d$, was in (i) zu $b^2/4d^2 - d^2 = a$ führt. Dies ergibt

$$d^4 + ad^2 - \frac{b^2}{4} = 0,$$

was aufgelöst nach $d^2$ und wegen $d^2 \geq 0$ zu

$$d^2 = \frac{1}{2}\left(-a + \sqrt{a^2+b^2}\right)$$

führt. Damit gilt also $d = \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})}$. Die beiden Lösungen sind also $(\frac{b}{\pm\sqrt{2(-a+\sqrt{a^2+b^2})}}, \pm\sqrt{\frac{1}{2}(-a+\sqrt{a^2+b^2})})$.

## Aufgabe 4

(a) Zur besseren Übersichtlichkeit schreiben wir $\|P\|^2 := a^2 + b^2$. Wir bemerken zuerst, dass $t = 0$ in der gegebenen Geradengleichung genau den Punkt $N \in S^2$ liefert. Im Folgenden gehen wir also von $t \neq 0$ aus, um den zweiten Schnittpunkt mit $S^2$ zu finden. Ein Punkt auf der Geraden durch $P$ und $N$, parametrisiert durch $t$, hat die Koordinaten $(ta, tb, 1-t)$. Wenn er auf $S^2$ liegen soll, muss

$$t^2a^2 + t^2b^2 + (1-t)^2 = 1$$

gelten. Nach $t$ aufgelöst (wegen $t \neq 0$) ergibt dies $t = \frac{2}{\|P\|^2+1}$ und damit, eingesetzt in die Geradengleichung, den Punkt

$$\left(\frac{2a}{\|P\|^2+1}, \frac{2b}{\|P\|^2+1}, \frac{\|P\|^2-1}{\|P\|^2+1}\right).$$

(b) Wir setzen $f(N) := \infty$. Wir wählen nun $(x,y,z) = Q \in S^2\backslash\{N\}$, insbesondere gilt also $z \neq 1$. Wir suchen den Schnitt von der Geraden $QN$ mit $E$ und schreiben

$$QN = \{sN + (1-s)Q \mid s \in \mathbb{R}\}.$$

Der Schnittpunkt mit $E$ hat $z$-Koordinate 0, was die Forderung $s + (1-s)z = 0$ liefert, was zu $s = \frac{z}{1-z}$ führt. Damit ist $1 - s = \frac{1}{1-z}$ und eingesetzt in die Geradengleichung erhalten wir

$$f^{-1}((x,y,z)) = \begin{cases} \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) & \text{falls } (x,y,z) \neq (0,0,1), \\ \infty & \text{falls } (x,y,z) = (0,0,1). \end{cases}$$

## Aufgabe 5

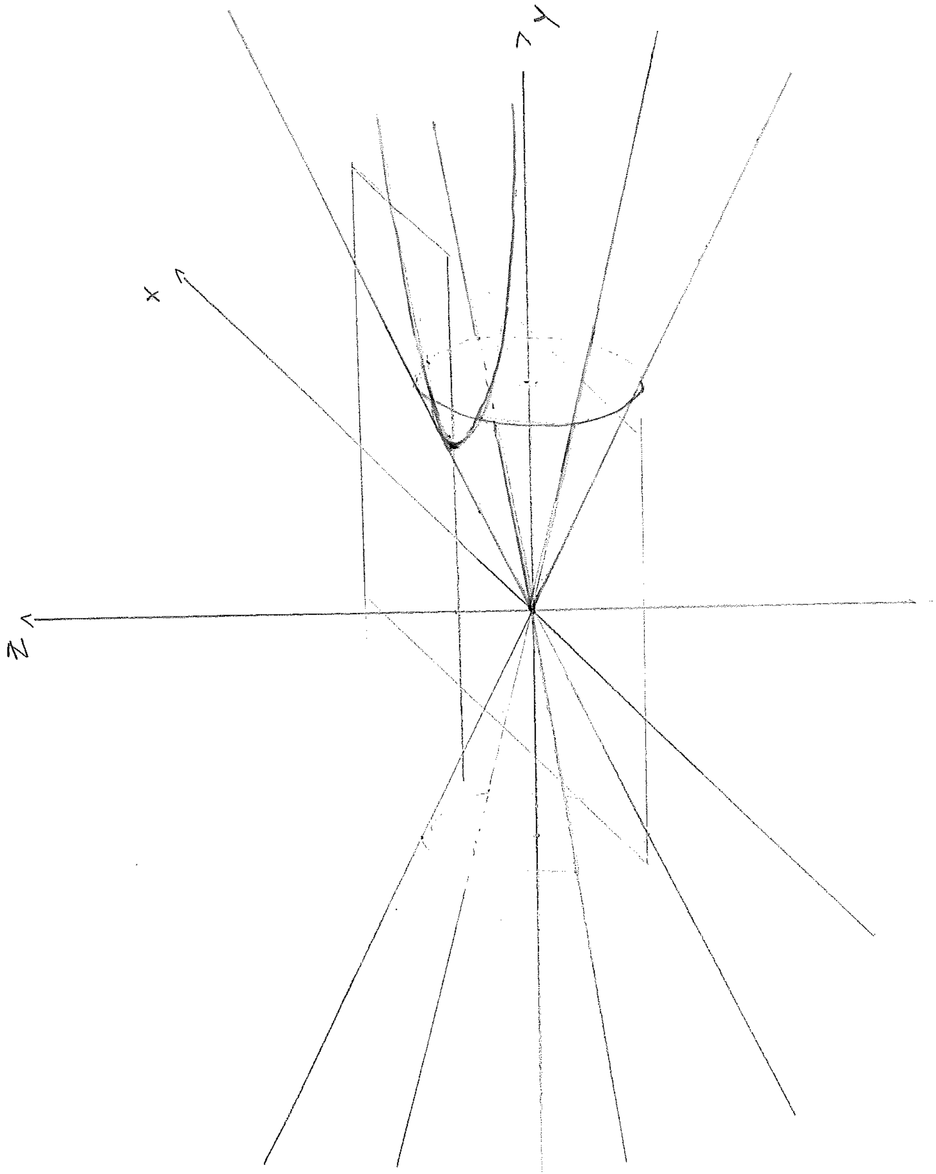
(b) Wir zeigen zuerst die Surjektivität. Sei dafür $(x,y,z) \in K$. Wir betrachten zuerst den Fall, dass $z = 0$. Dann muss $0 \neq |x| = |y|$ gelten und damit $0 \neq x = \pm y$. Die beiden zugehörigen Geraden in $G$ sind genau $(1, \pm 1, 0)$ und damit die Bilder von $\infty_\pm$.

Wir wenden uns nun dem Fall zu, dass $z \neq 0$. Dann liegen $(x,y,z)$ und $(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1)$ auf derselben Gerade aus $G$. Das heißt die Gerade $\mathbb{R}(x,y,z)$ hat den Urbildpunkt $(x/z, y/z) \in H$ (die Zugehörigkeit zu $H$ lässt sich leicht überprüfen).

Wir zeigen nun die Injektivität von $f$ und nehmen dafür zwei Punkte $P, P'$ aus $H \cup \{\infty_\pm\}$ mit $f(P) = f(P')$. Falls $P = \infty_\pm$, so ist $f(P)$ eine Gerade in der $xy$-Ebene, kann also insbesondere nicht von der Form $\mathbb{R}(x,y,1)$ sein. Damit ist auch $f(P') = \mathbb{R}(1, \pm 1, 0)$ und folglich $P = P'$.

Wir können also annehmen, dass $P \neq \pm\infty \neq P'$ und die beiden Punkte die Form $P = (x,y), P' = (x',y')$ besitzen. Dann ist also $\mathbb{R}(x,y,1) = \mathbb{R}(x',y',1)$ und insbesondere $(x,y,1) = (x',y',1)$, also $P = P'$.

(a)


y
x
z