Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Das Guthaben G setzt sich zusammen aus der Summe aller bisherigen Einzahlungen multipliziert mit $(1+p)^k$, wobei k gleich der seit der Einzahlung verstrichenen Jahre ist. Insgesamt erhält man unter Verwendung der geometrischen Reihe, unter der Annahme, dass $p \neq 0$:

$$G = \sum_{k=0}^{n-1} x(1+p)^k = x \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1-(1+p)^n}{1-(1+p)} = x\frac{1-(1+p)^n}{-p} = x\frac{(1+p)^n - 1}{p}. \tag{1}$$

Für den Fall $p = 0$ gilt: $G = \sum_{k=0}^{n-1} 1 = nx$. In der folgenden Tabelle sind die gefragten Werte jeweils auf ganze Euro gerundet angegeben:

p	0	0.01	0.04
$\frac{G}{€}$	4000	4889	9503

Aufgabe 2

Zuerst zeigen wir zwei Hilfslemmata:

Lemma 1. *Variante des archimedischen Axioms:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : \exists n \in \mathbb{Z} : n > x. \tag{VarArch}$$

Beweis: Sei $x \in \mathbb{R}$. Nach dem archimedischen Axiom gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, sodass $n > x$. Für dieses n gilt offensichtlich auch $n \in \mathbb{Z}$.

Lemma 2. *Sei $M \subset \mathbb{Z}$ und nehme an, das Supremum und Infimum von M existieren. Sei $n \in \mathbb{N}$ so, dass $(\sup M - \inf M) \in [0, n]$ (nach dem archimedisches Axiom gibt es ein solches n), dann gilt*

$$|M| \leq n + 1. \tag{komp}$$

Beweis: Sei $M \subset \mathbb{Z}$ und nehme an das Infimum und Supremum von M existieren. Zuerst verkürzen wir die Notation etwas:

$$b := \inf M, \qquad a := \sup M. \tag{2}$$

Wir führen den Beweis durch Induktion über n.
Induktionsanfang $n = 0$: Hier gilt $a - b = 0 \Leftrightarrow a = b$ also gilt für ein beliebiges $m \in M$

$$b \leq m \leq a \Leftrightarrow b \leq m \leq b \Leftrightarrow m = b. \tag{3}$$

Alle Elemente sind gleich dem Infimum, also kann M höchstens ein Element haben.
Induktionsschritt: $n \to n + 1$: Definiere

$$M' := M \cap \,]-\infty, a-1] = M \cap [b, a-1]. \tag{4}$$

Dann gilt

$$M \backslash M' \subseteq \,]a-1, a]. \tag{5}$$

Seien $m_1, m_2 \in M \backslash M'$ (falls diese Menge leer ist, die Induktionsvoraussetzung beweist die Behauptung), dann gilt nach Voraussetzung: $m_1, m_2 \in \mathbb{Z}$, also auch

$$|m_1 - m_2| \geq 1 \vee m_1 = m_2 \tag{6}$$

und

$$a - 1 < m_1 \leq a, \qquad a - 1 < m_2 \leq a$$
$$\Rightarrow \Big(m_1 - m_2 \leq a - m_2 < a - a + 1 = 1 \qquad (7)$$
$$\wedge - m_1 + m_2 \leq -m_1 + a < -a + 1 + a = 1 \Big).$$

Also insgesamt $|m_1 - m_2| < 1$. Wenn zwei beliebige Elemente von $M \backslash M'$ weniger als 1 voneinander entfernt sind, kann diese Menge also aufgrund von (6) höchstens ein Element enthalten. M enhält also insgesamt höchstens $n + 1$ Elemente, was das Lemma beweist.
Nun zur Aufgabe: Sei $r \in \mathbb{R}$. Wir widmen uns erst der Existenz. Sei

$$H := \{l \in \mathbb{Z} \cap \mathbb{R} \mid l \leq r\}. \qquad (8)$$

Diese Menge $H \subset \mathbb{R}$ ist nicht leer, denn nach (VarArch) existiert ein $n \in \mathbb{Z}$, sodass $n > -r$ und daher $-n < r$ also $(-n) \in H$. Sie ist außerdem von oben durch r beschränkt und besitzt daher nach dem Vollständigkeitsaxiom ein Supremum.
Sei $h \in H$, wir definieren nun eine weitere Menge:

$$J := \{j \in H \mid j \geq h\}. \qquad (9)$$

Diese Menge ist ebenfalls nicht leer(sie entält mindestens das Element h), ist von oben durch r beschränkt, ist von unten durch h beschränkt und ist eine Teilmenge der ganzen Zahlen. Wir definieren $z := \sup J = \sup H$. Lemma (komp) sagt uns, dass J nur endlich viele Elemente hat. Das bedeutet aber, dass $z = \sup J = \max J \in J$, also dass z in J liegt. Also insbesondere $z \in \mathbb{Z}$. Wir sind jetzt gewappnet für die folgende

Behauptung. *Es gelten die folgenden Ungleichungen*

$$z \leq r < z + 1. \qquad (10)$$

Beweis: Die erste Ungleichung gilt nach Konstruktion von z. Für die zweite Ungleichung nehmen wir an, dass $r \geq z + 1$. In diesem Fall ist aber $z + 1 \in H$, was ein Widerspruch dazu ist, dass z das Supremum von H ist.

Die Existenz einer ganzen Zahl mit den geforderten Eigenschaften ist also bewiesen, die Eindeutigkeit folgt aber unmittelbar aus den Eigenschaften der ganzen Zahlen:
Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$, sodass beide Zahlen jeweils (10) für dasselbe $r \in \mathbb{R}$ erfüllen. Dann gilt offenbar:

$$z_1 - z_2 \leq r - z_2 < r - r + 1 \wedge -z_1 + z_2 \leq -z_1 + r < -r + 1 + r. \qquad (11)$$

Der Abstand der beiden Zahlen ist also kleiner als eins, sie sind aber auch ganze Zahlen. Daraus folgt $z_1 = z_2$. □

Aufgabe 3

Es sei D die Menge der abbrechenden Dezimalbrüche wie in der Aufgabenstellung. Es sei weiterhin $a \in \mathbb{R}$ Wir definieren:

$$\sup\{x \in D \mid x < a\} =: \sup A. \qquad (12)$$

Dann ist a eine obere Schranke von A, denn für jedes $b \in A$ gilt: $b < a$. Es bleibt noch zu zeigen, dass a die kleinste obere Schranke ist. Für einen Widerspruch nehmen wir an, dass $\alpha < a$ ebenfalls eine obere Schranke von A sei. Das archimedische Axiom (zweite Variante im Skript) garantiert uns die Existenz eines $n \in \mathbb{N}$ sodass: $\frac{2}{n} < a - \alpha$. Daraus folgt für dieses n

$$2 < (a - \alpha)n \overset{\text{Bernoulli-Ungleichung}}{\leq} (a - \alpha)10^n$$
$$\Rightarrow 2 + \alpha 10^n < a 10^n \Rightarrow \lfloor 1 + \alpha 10^n \rfloor < \lfloor a 10^n \rfloor \qquad (13)$$
$$\Rightarrow \frac{\lfloor 1 + \alpha 10^n \rfloor}{10^n} < \frac{\lfloor a 10^n \rfloor}{10^n} \leq a.$$

Also ist $\frac{\lfloor 1+\alpha 10^n \rfloor}{10^n} \in A$, aber auch $\frac{\lfloor 1+\alpha 10^n \rfloor}{10^n} > \alpha$. Das ist ein Widerspruch dazu, dass α eine obere Schranke von A ist. $\square$

Aufgabe 4

4a) Seien $a, b, L(a,b)$ wie in der Aufgabenstellung. Es gilt: $2^{19} = 524288, 3^{11} = 177147$, $3^{12} = 531441$, woraus $3^{11} < 2^{19} < 3^{12}$ folgt. Aus der zweiten Ungleichheit folgt: $\frac{19}{12} \in L(2,3)$ und aus der ersten folgt $\frac{19}{11} \notin L(2,3)$.

4b) Wir beginnen mit einem Hilfslemma:

Lemma 3. *Es gilt:*

$$\forall n \in \mathbb{N} : \forall a > 0, \forall b \in \mathbb{R}^+ : a > b \iff a^n > b^n. \tag{14}$$

Beweis:

Es sei $a > 0, a > b > 0$, wir füren den Beweis über Induktion über n:
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist die Aussage trivial.
Induktionsschritt($n \to n+1$): "$\Rightarrow$"Nach Induktionsvoraussetzung gilt:

$$a^n > b^n \Rightarrow a^{n+1} > b^n a > b^{n+1}. \tag{15}$$

"$\Leftarrow$" Beweis durch Widerspruch: nehme an $a \leq b$. Falls $b = a$ gilt, so gilt auch $b^n = a^n$(Trivialer Beweis über Induktion), was im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung steht. Falls $a < b$ gilt, so gilt nach Induktionsvoraussetzung (und vertauschen der Variablen) $a^n < b^n$. Das steht ebenfalls im Widerspruch zur Induktionsvoraussetzung.
Nun zur Aufgabe: Seien $a, b, L(a,b)$ wie in der Aufgabenstellung. Seien weiterhin $p, q \in \mathbb{Q}$ mit $p > q, p \in L(a,b)$. Das heißt, wir finden $m, d \in \mathbb{Z}, n, e \in \mathbb{N}$ mit $p = \frac{m}{n}, q = \frac{d}{e}$, sodass

$$\frac{m}{n} > \frac{d}{e} \iff me > nd \iff me - dn > 0. \tag{16}$$

Mit (14) lässt sich folgendes bestimmen:

$$\begin{aligned} &a^{me-dn} \overset{(14)}{>} 1^{me-dn} = 1 \iff a^{nd} < a^{me} = (a^m)^e \overset{p \in L(a,b)}{<} (b^n)^e = b^{ne} \\ &\overset{(14)}{\Rightarrow} a^d < b^e \iff q \in L(a,b). \end{aligned} \tag{17}$$

$\square$

4c) Seien $a > 1, b \in \mathbb{R}^+$ wie in der Aufgabenstellung. Sei $\varepsilon = a - 1 > 0$. Wir zeigen zuerst, dass $L(a,b)$ nicht leer ist: Wähle $m \in \mathbb{N}_0$ nach dem archimedischen Axiom, so dass: $\frac{1}{m} < b\varepsilon$ gilt. Dann folgt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{b} < m\varepsilon < 1 + m\varepsilon \overset{\text{Bernoulli Ungl.}}{\leq} (1+\varepsilon)^m = a^m \\ &\Rightarrow \frac{1}{a^m} = a^{-m} < b \Rightarrow \frac{-m}{1} \in L(a,b). \end{aligned} \tag{18}$$

Nun zur oberen Schranke: Wähle nach dem archimedischen Axiom $m \in \mathbb{N}_0$, so dass $m\varepsilon > b - 1$. Dann folgt

$$a^m = (1+\varepsilon)^m \geq 1 + m\varepsilon > b \Rightarrow \mathbb{Q} \ni \frac{m}{1} \notin L(a,b). \tag{19}$$

Die von uns gefundene rationale Zahl $h := \frac{m}{1}$ ist also nicht in $L(a,b)$ enhalten. Aufgrund von Teilaufgabe b) folgt daraus, dass h eine obere Schranke ist. Das kann man so einsehen:
Nehme an, dass h keine obere Schranke ist. Dann gibt es ein $f \in L(a,b)$ mit $f \geq h$. Dann gilt aber entweder $h = f$, was ein Widerspruch zu $h \notin L(a,b)$ ist, oder $f > h$. Im zweiten Fall folgt nach Teilaufgabe b), dass $h \in L(a,b)$ was wiederum ein Widerspruch ist. $\square$

4d) Aus a) und c) folgt: $\frac{19}{12} \in L(2,3)$, also ist $\log_2(3) \geq \frac{19}{12}$. Mit der gleichen Argumentation wie in c) folgt: $\log_2(3) < \frac{19}{11}$.

4e

Lemma 4. *Sei* $A \subseteq \mathbb{R}$ *so dass* $\inf A \in \mathbb{R}$. *Dann gilt*

$$\sup -A = -\inf A. \tag{20}$$

Beweis des Lemmas: "$-\inf A$ ist eine obere Schranke von $-A$": Sei $-a \in -A$, dann ist $a \in A$ und daher $\inf A \leq a$. Also folgt $-\inf A \geq -a$.
"Es gibt keine kleinere obere Schranke von $-A$ als $-\inf A$": Nehme für einen Widerspruch an, dass $\mathbb{R} \ni \varepsilon < -\inf A$ eine obere Schranke von $-A$ ist. Dann gilt

$$-\varepsilon > \inf A. \tag{21}$$

Wähle $c \in A \cap [\inf A, \frac{\inf A - \varepsilon}{2}[$. Diese Menge ist nicht leer, weil $\inf A$ ja die größte untere Schranke von A ist. Dann gilt: einerseits $-c \in -A$ und andererseits $-c \geq \frac{\varepsilon - \inf A}{2} > \varepsilon$, was ein Widerspruch dazu ist, dass ε eine obere Schranke ist.

Lemma 5. *Sei* $A \subset \mathbb{Q}$ *mit*

$$\forall p, q \in \mathbb{Q} : p \in A \wedge p > q \Rightarrow q \in A \tag{22}$$

und es existiere das Supremum von$A$. *Dann gilt*

$$\sup A = \inf(\mathbb{Q} \backslash A). \tag{23}$$

Beweis: "$\leq$": Sei $c \in A$ dann gilt für jedes $u \in \mathbb{Q} \backslash A$: $u \geq c$ aufgrund von (22).
"$\geq$": Nehme für einen Widerspruch an, es gäbe ein $\varepsilon > 0$ mit:

$$\inf(\mathbb{Q} \backslash A) - \sup A > \varepsilon. \tag{24}$$

Wähle dann ein $x \in]\sup A - \frac{\varepsilon}{3}, \sup A] \cap A$ und $y \in]\sup A, \sup A + \frac{\varepsilon}{3}[\cap (\mathbb{Q} \backslash A)$. Dann gilt

$$\inf(\mathbb{Q} \backslash A) - \sup A < y - x < \sup A + \frac{\varepsilon}{3} - \sup A + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon, \tag{25}$$

was ein Widerspruch zur Annahme ist. Also gilt $\forall \varepsilon > 0 \inf(\mathbb{Q} \backslash A) - \sup A \leq \varepsilon$, also $\inf(\mathbb{Q} \backslash A) - \sup A = 0$.
Nun zur Aufgabe: Wir beginnen damit, $\log_a\left(\frac{1}{b}\right)$ umzuschreiben:

$$\begin{aligned}
&\log_a\left(\frac{1}{b}\right) = \sup\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < \frac{1}{b^n}\right\} = \sup\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^{-n}\right\} \\
&= \sup\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^{-m} > b^n\right\} = \sup\left\{-\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m > b^n\right\} \\
&\overset{\text{(i)}}{=} -\inf\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m > b^n\right\} \overset{\text{(ii)}}{=} -\sup\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m \leq b^n\right\} \\
&\overset{\text{(iii)}}{=} -\sup\left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^n\right\} \\
&= -\log_a(b).
\end{aligned} \tag{26}$$

Die mit (i) gekennzeichnete Gleichheit folgt aus (20), (ii) folgt aus (23) und (iii) sieht man wie folgt ein: Wir stellen fest, dass $C := \left\{-\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m = b^n\right\}$ der Unterschied der beiden relevanten Mengen ist. Wenn das Supremum der linken Seite der Gleichung nicht auf dieser Untermenge angenommen wird ist offensichtlich, dass die beiden Suprema übereinstimmen. Wir gehen also davon aus, dass C nicht leer ist und das Supremum der linken Seite der Gleichung auf C angenommen wird.

Sei $x \in C$, dann gibt es $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}$ mit $\frac{m}{n} = x$ und daher $a^m = b^n$. Es gilt außerdem für jedes $l \in \mathbb{N}$: $a^{ml} = b^{nl}$ und damit auch

$$a^{lm-1} < a^{lm} = b^{ln} \Rightarrow \frac{lm-1}{ln} \in \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m < b^n\right\} := A. \tag{27}$$

Mit den Rechenregeln für Suprema aus dem Tutorienblatt ergibt sich die gesuchte Relation:

$$\begin{aligned} \sup A \geq \sup\{\frac{m}{n} - \frac{1}{ln} \mid \frac{m}{n} \in C, l \in \mathbb{N}\} &\geq \sup\{\frac{m}{n} - \frac{1}{l} \mid \frac{m}{n} \in C, l \in \mathbb{N}\} \\ &= \sup\{\frac{m}{n} \mid \frac{m}{n} \in C + \sup\{-\frac{1}{l} \mid l \in \mathbb{N}\} = \sup C. \end{aligned} \tag{28}$$

Der zweite Fall zum Beweis der Gleichheit ("$\leq$") ist trivial, da $A \subset \left\{\frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, a^m \leq b^n\right\}$.

□

4f) Seien $a, b, c \in \mathbb{R}^+, a > 1$. Wir folgen dem Hinweis und beweisen zuerst "$\geq$". Sei $\frac{\alpha}{\beta} \in L(a,b), \frac{\gamma}{\delta} \in L(a,c)$, dann gilt:

$$a^\alpha < b^\beta \quad \wedge \quad a^\gamma < c^\delta. \tag{29}$$

Also gilt auch:

$$a^{\alpha\delta} \; < \; b^{\beta\delta} \quad \wedge \quad a^{\gamma\beta} \; < \; c^{\delta\beta} \quad \Rightarrow \quad a^{\alpha\delta+\gamma\beta} \; < \; (bc)^{\beta\delta} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \; \in \; L(a,bc) \tag{30}$$

Zudem gilt offenbar $\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \geq \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta}$. Es folgt also

$$\begin{aligned} &\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \geq \frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \\ &\Rightarrow \sup\left\{\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \mid \frac{\alpha}{\beta} \in L(a,b), \frac{\gamma}{\delta} \in L(a,c)\right\} \geq \sup\left\{\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\gamma}{\delta} \mid \frac{\alpha}{\beta} \in L(a,b), \frac{\gamma}{\delta} \in L(a,c)\right\} \\ &\Rightarrow \sup\left\{\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \mid \frac{\alpha}{\beta} \in L(a,b), \frac{\gamma}{\delta} \in L(a,c)\right\} \geq \log_a(b) + \log_a(c) \\ &\overset{(30)}{\Rightarrow} \sup\left\{\frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \mid \frac{\alpha\delta+\gamma\beta}{\beta\delta} \in L_a(bc)\right\} \geq \log_a(b) + \log_a(c) \\ &\Rightarrow \sup L(a,bc) = \log_a(bc) \geq \log_a(b) + \log_a(c) \end{aligned} \tag{31}$$

Für "$\leq$" verwenden wir die letzte Teilaufgabe:

$$\log_a(bc) = -\log_a(b^{-1}c^{-1}) \overset{\text{"}\geq\text{"}}{\leq} -\log_a(b^{-1}) - \log_a(c^{-1}) = \log_a(b) + \log_a(c). \tag{32}$$

□

Aufgabe 5

5a) Sei $m, l \in \mathbb{N}, m \geq l$ und a_l wie in der Aufgabenstellung. Dann gilt

$$a_m = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^{l} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=l+1}^{m} \frac{1}{n^2} = a_l + \sum_{n=l+1}^{m} \frac{1}{n^2}, \tag{33}$$

woraus $a_l \leq a_m$ folgt. Zu zeigen ist nur noch

$$\sum_{n=l+1}^{m} \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{l} - \frac{1}{m}. \tag{34}$$

Dies beweisen wir mit Induktion über m:
Induktionsanfang "$m = 1$": die Aussage ist offensichtlich in diesem Fall.
Induktionsschritt "$m \to m + 1$": Der Beweis besteht aus einer kurzen Rechnung:

$$\begin{aligned}\sum_{n=l+1}^{m+1} \frac{1}{n^2} &= \sum_{n=l+1}^{m} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(m+1)^2} \overset{\mathrm{IV}}{\leq} \frac{1}{l} - \frac{1}{m} + \frac{1}{(m+1)^2} = \frac{1}{l} - \frac{(m+1)^2 - m}{m(m+1)^2} \\ &= \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1}\frac{(m+1)^2 - m}{m(m+1)} = \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1}\frac{m^2+m+1}{m^2+m} \leq \frac{1}{l} - \frac{1}{m+1}.\end{aligned} \tag{35}$$

□

5b) Für $l = 1$ gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$1 \leq a_m \leq 2 - \frac{1}{m} < 2. \tag{36}$$

Hieraus folgt, dass A durch 2 nach oben beschränkt ist, also ist insbesondere $\sup A$ wohldefiniert.

5c) Wenn wir $l = 10$ wählen, dann gilt

$$\begin{aligned}&\forall k \in \mathbb{N}: \quad a_{10} \leq a_k \leq a_{10} + \frac{1}{10} - \frac{1}{k} \leq a_{10} + \frac{1}{10} \\ &\Rightarrow \forall k \in \mathbb{N} \;\; a_{10} \leq \sup A \leq a_{10} + \frac{1}{10}.\end{aligned} \tag{37}$$

Einen Taschenrechner (oder Computer) verwendend, ergibt sich

$$a_{10} \approx 1.5497677311665408. \tag{38}$$