Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Sei $\varphi(m)$ die zu zeigende Aussage. Wir beweisen $(\forall m \in \mathbb{N}_0 : \varphi(m))$ via Induktion.

Induktionsanfang ($\varphi(0)$ bzw. $m = 0$) Es gilt

$$\sum_{n=1}^{0} \frac{n}{2^n} = 0 = 2 - \frac{2+0}{2^0}.$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $m \in \mathbb{N}_0$ gegeben und es gelte $\varphi(m)$.

Induktionsschritt ($\varphi(m) \Rightarrow \varphi(m+1)$ bzw. $m \to m+1$) Es gilt

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{m+1} \frac{n}{2^n} &= \sum_{n=1}^{m} \frac{n}{2^n} + \frac{m+1}{2^{m+1}} \overset{\text{IV}}{=} 2 - \frac{2+m}{2^m} + \frac{m+1}{2^{m+1}} \\ &= 2 - \frac{4+2m-(m+1)}{2^{m+1}} = 2 - \frac{2+(m+1)}{2^{m+1}}.\end{aligned}$$

□

Aufgabe 2

(a) **Schema:** Für jede Aussage $\varphi(n)$ über natürliche Zahlen gilt:

Wenn $\varphi(0)$ und $\varphi(1)$ gelten, und wenn für alle $n \in \mathbb{N}_0$ aus $\varphi(n)$ und $\varphi(N(n))$ die Aussage $\varphi(N(N(n))$ folgt, dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Aussage $\varphi(n)$.

In Formeln:

$$\big[\varphi(0) \wedge \varphi(1) \wedge \forall n \in \mathbb{N}_0 : \big(\varphi(n) \wedge \varphi(N(n)) \Rightarrow \varphi(N(N(n)))\big)\big] \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}_0 : \varphi(n).$$

(b) Wir wenden das Schema aus (a) an, um die Aussage $\psi(n) = [a_n = n2^n]$ für jedes $n \in \mathbb{N}_0$ zu zeigen.

Induktionsanfang ($\psi(0), \psi(1)$) Es gilt

$$a_0 = 0 = 0 \cdot 2^0, \quad a_1 = 2 = 1 \cdot 2^1.$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $\psi(n-1) \wedge \psi(n)$.

Induktionsschritt ($\psi(n-1) \wedge \psi(n) \Rightarrow \psi(n+1)$) Es gilt

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= 4(a_n - a_{n-1}) \overset{\text{IV}}{=} 4(n2^n - (n-1)2^{n-1}) \\ &= 4 \cdot 2^{n-1}(2n - (n-1)) = 2^{n+1}(n+1).\end{aligned}$$

□

Aufgabe 3

Die Definitionen aus H1.1 sind

$$\text{(i) } a+0 := a, \qquad \text{(ii) } a+N(b) := N(a+b)$$
$$\text{(iii) } a\cdot 0 := 0, \qquad \text{(iv) } a\cdot N(b) := a\cdot b + a.$$

Wir starten die Lösung mit zwei Beobachtungen.

Lemma 1 (L1)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$a + N(b) = N(a) + b.$$

Beweis. Wir beweisen die Aussage mittels Induktion über $b \in \mathbb{N}_0$. Für den Induktionsanfang ($b = 0$) beobachten wir, dass

$$a + N(0) \overset{\text{(ii)}}{=} N(a+0) \overset{\text{(i)}}{=} N(a) \overset{\text{(i)}}{=} N(a) + 0.$$

Als Induktionsvoraussetzung gelte die Aussage also für $b \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$a + N(N(b)) \overset{\text{(ii)}}{=} N(a + N(b)) \overset{\text{IV}}{=} N(N(a) + b) \overset{\text{(ii)}}{=} N(a) + N(b),$$

was zu zeigen war. □

Lemma 2 (L2)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$n + 0 = 0 + n.$$

Beweis. Erneut gehen wir induktiv vor. Für den Induktionsanfang ($n = 0$) gilt $0+0 = 0 = 0+0$. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$, so sehen wir, dass

$$N(n) + 0 \overset{\text{L1}}{=} n + N(0) \overset{\text{(ii)}}{=} N(n+0) \overset{\text{IV}}{=} N(0+n) \overset{\text{(ii)}}{=} 0 + N(n).$$

□

(a) Wir beweisen die Aussage $\psi(b) = [\forall a \in \mathbb{N}_0 : a + b = b + a]$ via Induktion über $b \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang ($b = 0$) Das zu Zeigende ist genau Lemma 2. Gewissermaßen haben wir also eine doppelte Induktion durchgeführt, die innere Induktion jedoch mit Lemma 2 ausgelagert.

Induktionsvoraussetzung Es sei $b \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\psi(b)$.

Induktionsschritt ($b \to N(b)$) Es gilt

$$a + N(b) \overset{\text{(ii)}}{=} N(a+b) \overset{\text{IV}}{=} N(b+a) \overset{\text{(ii)}}{=} b + N(a) \overset{\text{L1}}{=} N(b) + a,$$

was für den Induktionsschritt zu zeigen war.

(b) Wir beweisen die Aussage $\psi(a) = [\forall b, c \in \mathbb{N}_0 : (a+b)+c = a+(b+c)]$ via Induktion über $a \in \mathbb{N}_0$

Induktionsanfang ($a = 0$) Es gilt

$$(0+b)+c \overset{\text{(a)}}{=} (b+0)+c \overset{\text{(i)}}{=} b+c \overset{\text{(i)}}{=} (b+c)+0 \overset{\text{(a)}}{=} 0+(b+c).$$

Induktionsvoraussetzung Es gelte sei $a \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\psi(a)$.

Induktionsschritt $(a \to N(a))$ Es gilt

$$\begin{aligned}(N(a)+b)+c &\overset{\text{L1}}{=} (a+N(b))+c \overset{\text{IV}}{=} a+(N(b)+c) \overset{\text{L1}}{=} a+(b+N(c)) \\ &\overset{\text{(ii)}}{=} a+N(b+c) \overset{\text{L1}}{=} N(a)+(b+c).\end{aligned}$$

Bevor wir uns den weiteren Teilaufgaben zuwenden, folgen weitere Beobachtungen.

Lemma 3 (L3)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$n \cdot 0 = 0 = 0 \cdot n, \qquad n \cdot 1 = n = 1 \cdot n.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die erste Aussage via Induktion. Der Anfang $(n = 0)$ ist klar, da $0 \cdot 0 = 0$ nach (iii). Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ und gelten die Identitäten für n. Dann folgt

$$N(n) \cdot 0 \overset{\text{(iii)}}{=} 0 \overset{\text{(iii)}}{=} n \cdot 0 \overset{\text{(i)}}{=} n \cdot 0 + 0 \overset{\text{IV}}{=} 0 \cdot n + 0 \overset{\text{(iv)}}{=} 0 \cdot N(n).$$

Auch den zweiten Teil beweisen wir über Induktion. Der Induktionsanfang $n = 0$ folgt aus dem ersten Teil, den wir gerade bewiesen haben. Gelte die Aussage also für $n \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$\begin{aligned}1 \cdot N(n) &\overset{\text{(iv)}}{=} 1 \cdot n + 1 \overset{\text{IV}}{=} n + N(0) \overset{\text{(ii)}}{=} N(n+0) \\ &\overset{\text{(i)}}{=} N(n) \overset{\text{(i)}}{=} N(n) + 0 \overset{\text{(a)}}{=} 0 + N(n) \overset{\text{(iii)}}{=} N(n) \cdot 0 + N(n) \overset{\text{(iv)}}{=} N(n) \cdot N(0) \\ &= N(n) \cdot 1.\end{aligned}$$

□

Lemma 4 (L4)**.** *Seien $l, m, n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$(l+m) \cdot n = l \cdot n + l \cdot m.$$

Beweis. Wir beweisen zuerst die erste Aussage via Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Für den Induktionsanfang $(n = 0)$ beobachten wir, dass

$$(l+m) \cdot 0 \overset{\text{(iii)}}{=} 0 \overset{\text{(i)}}{=} 0 + 0 \overset{\text{(iii)}}{=} l \cdot 0 + m \cdot 0.$$

Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Aussage gelte für $n \in \mathbb{N}_0$ und beliebige $l, m \in \mathbb{N}_0$. Dann

$$\begin{aligned}(l+m) \cdot N(n) &\overset{\text{(iv)}}{=} (l+m) \cdot n + (l+m) \overset{\text{IV}}{=} (l \cdot n + m \cdot n) + (l+m) \\ &\overset{\text{(b)}}{=} (l \cdot n + l) + (m \cdot n + m) \overset{\text{(iv)}}{=} l \cdot N(n) + m \cdot N(n).\end{aligned}$$

□

(c) Wir beweisen die Aussage $\psi(b) = [\forall a \in \mathbb{N}_0 : a \cdot b = b \cdot a]$ mittels Induktion über $b \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang $(b = 0)$ Es gilt $a \cdot 0 = 0 \cdot a$ nach Lemma 3.

Induktionsvoraussetzung Es sei $b \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\psi(b)$.

Induktionsschritt $(b \to N(b))$ Wir beobachten

$$\begin{aligned}a \cdot N(b) &\overset{\text{(iv)}}{=} a \cdot b + a \overset{\text{IV}}{=} b \cdot a + a \overset{\text{L3}}{=} b \cdot a + N(0) \cdot a \\ &\overset{\text{L4}}{=} (b + N(0)) \cdot a \overset{\text{(ii)}}{=} N(b+0) \cdot a \overset{\text{(i)}}{=} N(b) \cdot a.\end{aligned}$$

(d) Wir beweisen die Aussage $\psi(a) = [(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)]$ mittels Induktion über $a \in \mathbb{N}_0$.

Induktionsanfang $(a = 0)$ Für $b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$(0 \cdot b) \cdot c \overset{\text{(c)}}{=} (b \cdot 0) \cdot c \overset{\text{(ii)}}{=} 0 \cdot c \overset{\text{(c), (ii)}}{=} 0 \overset{\text{(ii)}}{=} (b \cdot c) \cdot 0 \overset{\text{(c)}}{=} 0 \cdot (b \cdot c).$$

Induktionsvoraussetzung Es sei $a \in \mathbb{N}_0$ und es gelte $\psi(a)$.

Induktionsschritt $(a \to N(a))$ Es gilt

$$\begin{aligned}(N(a) \cdot b) \cdot c &\overset{\text{(c)}}{=} (b \cdot N(a)) \cdot c \overset{\text{(iv)}}{=} (b \cdot a + b) \cdot c \\ &\overset{\text{L4}}{=} (b \cdot a) \cdot c + b \cdot c \overset{\text{IV}}{=} a \cdot (b \cdot c) + b \cdot c \\ &\overset{\text{L3}}{=} a \cdot (b \cdot c) + N(0) \cdot (b \cdot c) \overset{\text{(e)}}{=} (a + N(0)) \cdot (b \cdot c) \\ &\overset{\text{(ii), (i)}}{=} N(a) \cdot (b \cdot c).\end{aligned}$$

(e) Für $a, b, c \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a \cdot (b + c) \overset{\text{(c)}}{=} (b + c) \cdot a \overset{\text{L4}}{=} b \cdot a + c \cdot a \overset{\text{(c)}}{=} a \cdot b + a \cdot c.$$

Aufgabe 4

Es gelte

$$[\forall n : ((\forall m < n : \varphi(m)) \Rightarrow \varphi(n))] \tag{1}$$

für eine Formel φ. Wir möchten $\varphi(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ folgern. Hierfür wählen wir die Formel ψ als

$$\psi(n) = (\forall m \leq n : \varphi(m))$$

und wenden das Induktionsschema auf ψ an.

- Es ist $\psi(0)$ erfüllt: Wählen wir in (1) $n = 0$, so erhalten wir, dass $\varphi(0)$ erfüllt ist, womit auch $\psi(0)$ gilt.
- Des Weiteren folgt für beliebiges n auch aus der Gültigkeit von $\psi(n)$ die Gültigkeit von $\psi(n+1)$, denn

  $$\psi(n) \Rightarrow (\forall m \leq n : \varphi(m)) \Rightarrow (\forall m < n + 1 : \varphi(m)) \overset{(1)}{\Rightarrow} \varphi(n + 1)$$

  und

  $$(\psi(n) \wedge \varphi(n + 1)) \Rightarrow \psi(n + 1).$$

Aus (1) folgt also, dass nach dem Induktionsschema $\psi(n)$ für alle n folgt. Dies impliziert jedoch auch, dass $\varphi(n)$ für alle n gilt.

Aufgabe 5

(a)

$$\begin{aligned}p_1(k) &= \frac{1}{2}\left(k^2 - \binom{2}{0}p_0(k)\right) = \frac{1}{2}\left(k^2 - k\right) = \binom{k}{2}, \\ p_2(k) &= \frac{1}{3}\left(k^3 - p_0(k) - \binom{3}{1}p_1(k)\right) = \frac{1}{3}\left(k^3 - k - 3\binom{k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{6}k, \\ p_3(k) &= \frac{1}{4}\left(k^4 - p_0(k) - 4p_1(k) - 6p_2(k)\right) = \frac{1}{4}\left(k^4 - k - 4\binom{k}{2} - 2k^3 + 2k + 6\binom{k}{2}\right) \\ &= \frac{1}{4}(k^4 - 2k^3 + k^2).\end{aligned}$$

(b) Wir zeigen die Aussage via Induktion über n. Für den Induktionsanfang ($n = 0$) sehen wir, dass $p_0(k) = k = \sum_{l=0}^{k-1} 1$. Sei also $n \in \mathbb{N}_0$ und gelte die Induktionsvoraussetzung

$$p_m(k) = \frac{1}{m+1}\left(k^{m+1} - \sum_{j=0}^{m-1}\binom{m+1}{j}p_j(k)\right)$$

für alle $m \leq n$. Dann folgt

$$\begin{aligned}
p_{n+1}(k) &\overset{\text{IV}}{=} \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{j=0}^{n}\binom{n+2}{j}\sum_{l=0}^{k-1} l^j\right)\\
&\overset{\text{(i)}}{=} \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1}\sum_{j=0}^{n}\binom{n+2}{j} l^j\right)\\
&\overset{\text{(ii)}}{=} \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1}\left[\sum_{j=0}^{n+2}\binom{n+2}{j} l^j - l^{n+2} - (n+2)l^{n+1}\right]\right)\\
&\overset{\text{(iii)}}{=} \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1}\left[(1+l)^{n+2} - l^{n+2} - (n+2)l^{n+1}\right]\right)\\
&\overset{\text{(iv)}}{=} \sum_{l=0}^{k-1} l^{n+1} + \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{l=0}^{k-1}(1+l)^{n+2} + \sum_{l=1}^{k-1} l^{n+2}\right)\\
&\overset{\text{(v)}}{=} \sum_{l=0}^{k-1} l^{n+1} + \frac{1}{n+2}\left(k^{n+2} - \sum_{m=1}^{k} m^{n+2} + \sum_{l=1}^{k-1} l^{n+2}\right)\\
&= \sum_{l=0}^{k-1} l^{n+1}.
\end{aligned}$$

In (i) wurde das Distributivgesetz zum Vertauschen der Summen verwendet, in (ii) wird auf vorausschauende Art und Weise eine Null addiert. In Schritt (iii) nutzen wir die binomische Formel, während in Schritt (iv) umsortiert wird und in der letzten Summe der Index bei 1 statt bei 0 beginnt, da der Summand für $l = 0$ keinen Beitrag leistet. Schließlich wurde in Schritt (v) ein Index-Shift (eine Substitution des Summationsindex in Form von $m = l + 1$) vorgenommen, sodass sich der Ausdruck in der Klammer als Null herausstellt.