Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Obwohl diese Aufgabe sehr wichtig für die Klausurvorbereitung ist, ist hierfür nichts abzugeben.

Aufgabe 2

a): Aus der Erklärung lässt sich ablesen, dass die Steigung der Tangente an die Funktion im Punkt x durch die Kraftkomponenten gegeben ist. Es gilt daher für alle $x \in [x_0, x_1]$

$$f'(x) = \frac{F_2(x)}{F_1} = \frac{F_2(x_0)}{F_1} + \frac{\rho}{F_1} L(x). \tag{1}$$

Wir verwenden nun für L die im Skript angegebene Formel zur bestimmung der Länge einer Kurve und erhalten

$$f'(x) = \frac{F_2(x)}{F_1} = \frac{F_2(x_0)}{F_1} + \frac{\rho}{F_1} \int_{x_0}^{x} \sqrt{1 + (f'(t))^2} \mathrm{d}t. \tag{2}$$

Dies ist die gewünschte Gleichung, es ergibt sich also für die Konstanten $b = \frac{F_2(x_0)}{F_1}$ und $c = \frac{\rho}{F_1}$.

b): Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung folgt direkt

$$f''(x) = c\sqrt{1 + (f'(x))^2}. \tag{3}$$

Das ist gleichbedeutend mit der geforderten Gleichung.

c): Wir führen die Notation $g := f'$ ein. Gleichung (3) wird dann zu

$$g'(x) = c\sqrt{1 + g^2(x)}. \tag{4}$$

Mit dem gleichen Trick wie in Aufgabe H13.4 erhält man

$$\int_{g(x_0)}^{g(x)} \frac{\mathrm{d}g}{\sqrt{1+g^2}} = \int_{x_0}^{x} c\mathrm{d}t. \tag{5}$$

Den Integranden der linken Seite erkennen wir wieder als die Ableitung des Areasinus. Es gilt daher

$$\text{arsin } g(x) = cx - cx_0 + \text{arsin } g(x_0). \tag{6}$$

Die gewünschte Beziehung ergibt sich mit $x_2 = x_0 - \frac{1}{c}\text{arsin } g(x_0)$. Insgesamt folgt also für f

$$f(x) = \frac{1}{c} \cosh(c(x - x_2)) + y_2. \tag{7}$$

Aufgabe 3

a): Sei $n \in \mathbb{Z}$ gegeben. Wir zeigen, dass J_n reell ist und dass $J_{-n} = (-1)^n J_n$ gilt. Wir zeigen, dass $J_n^* = J_n$ gilt, indem wir die Substitution $z = \pi - t$ durchführen und anschließend einen Teil des Integranden um 2π verschieben. Letzteres ändert das Integral nicht, weil der Integrand 2π-periodisch ist. Die Gleichung $\forall \alpha \in \mathbb{R} : \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ wird ebenfalls verwendet. Schließlich ist für das berechnen der Komplex konjugierten Funktion J^* noch zu beachten, dass die Rechenregeln (momentan auf Seite 40) im Skript gelten, dass für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{R} : (\alpha + i\beta)^* = \alpha - i\beta$ und $\left(e^{i\alpha}\right)^* = e^{-i\alpha}$ gelten. Zudem ist das Integral einer komplex konjugierten Funktion gleich der komplexen Konjugation des Integrals über die Funktion selbst (folgt direkt aus Definition 5.9). Es gilt insgesamt

$$\begin{aligned} J_n^*(x) &= \frac{1}{2\pi(-i)^n}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-ix\cos(t)}\mathrm{d}t = \frac{(-1)^n}{2\pi i^n}\int_\pi^{-\pi} e^{in(\pi-z)}e^{ix\cos z}(-1)\mathrm{d}z \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i^n}e^{in\pi}\left(\int_0^\pi e^{-inz}e^{ix\cos z}\mathrm{d}z + \int_{-\pi}^0 e^{-inz}e^{ix\cos z}\mathrm{d}z\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i^n}(-1)^n\left(\int_0^\pi e^{-inz}e^{ix\cos z}\mathrm{d}z + \int_\pi^{2\pi} e^{-inz}e^{ix\cos z}\mathrm{d}z\right) = J_n(x). \end{aligned} \tag{8}$$

Nun zur zweiten Eigenschaft, diesmal substituieren wir $z = 2\pi - t$. Hierdurch verändert sich der Kosinus nicht, während sich das Vorzeichen in der ersten Exponentialfunktion ändert. Wir verwenden außerdem $\frac{1}{i} = -i$. Es gilt

$$\begin{aligned} J_{-n}(x) &= \frac{1}{2\pi i^{-n}}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{ix\cos(t)}\mathrm{d}t = \frac{i^n}{2\pi}\int_{2\pi}^0 e^{-inz}e^{ix\cos z}(-1)\mathrm{d}z \\ &= \frac{(-1)^n}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{-inz}e^{ix\cos z}\mathrm{d}z = (-1)^n J_n(x). \end{aligned} \tag{9}$$

b): Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben. Es gilt

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{ix\cos t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\sum_{k=0}^\infty \frac{(ix\cos t)^k}{k!}\mathrm{d}t. \tag{10}$$

Nun würden wir gerne Reihe und Integral vertauschen, nach dem Skript dürfen wir das wenn die Reihe gleichmäßig in t konvergiert. Das zeigen wir also als nächstes. Sei $\varepsilon > 0$ und $N \in \mathbb{N}$ so groß, dass sowohl $3(|x|)^N < \varepsilon N!$, als auch $N > 3|x|$ erfüllt sind. Das ist aufgrund des unendlichen Konvergenzradius der Exponentialfunktion immer möglich. Dann gilt für alle $m > N$ und alle $t \in [0, 2\pi]$

$$\begin{aligned} \left|e^{ix\cos t} - \sum_{k=0}^m \frac{(ix\cos t)^k}{k!}\right| &\leq \sum_{k=m+1}^\infty \frac{(|x||\cos t|)^k}{k!} \leq \frac{(|x||\cos t|)^{m+1}}{(m+1)!}\sum_{k=0}^\infty\left(\frac{|x||\cos t|}{m+1}\right)^k \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3}\sum_{k=0}^\infty \frac{1}{3^k} = \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \end{aligned} \tag{11}$$

wobei die oben angegebenen Schranken sowie $|\cos t| \leq 1$ für alle reellen t verwendet wurde. Für die Besselfunktion gilt also

$$\begin{aligned} J_n(x) &= \frac{1}{2\pi i^n}\int_0^{2\pi} e^{-int}\sum_{k=0}^\infty \frac{(ix\cos t)^k}{k!}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^\infty \frac{1}{2\pi i^n}\frac{(ix)^k}{k!}\int_0^{2\pi} e^{-int}\cos^k t\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^\infty \frac{i^{k-n}}{2\pi}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^k\binom{k}{l}\int_0^{2\pi} e^{-int}e^{itl}e^{-it(k-l)}\mathrm{d}t \\ &= \sum_{k=0}^\infty i^{k-n}\frac{x^k}{k!}\frac{1}{2^k}\sum_{l=0}^k\binom{k}{l}1_{2l=k+n} = \sum_{p=0}^\infty(-1)^p\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!}. \end{aligned} \tag{12}$$

Die letzte Gleichheit folgt nach einer Fallunterscheidung ob n gerade oder ungerade ist, eliminieren der inneren Summe und umbenennen der Summationsindizes, weil jeder zweite Summand Null ist. Der Konvergenzradius der Reihe ist unendlich, wie eine einfache Abschätzung und das Majorantenkriterium mit der in Aufgabe H8.1definierten Reihe ergeben.

c): Nach Satz 6.8 des Skriptes sind für $n \in \mathbb{Z}$ und $x \in \mathbb{R}$ die ersten zwei Ableitungen der Besselfunktion gegeben durch

$$\begin{aligned} J_n'(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{2p+n}{2} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n-1}}{(p+n)!p!} \\ J_n''(x) &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{(2p+n)(2p+n-1)}{4} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n-2}}{(p+n)!p!} \end{aligned} \tag{13}$$

Wir setzen in die Differentialgleichung ein und bemerken, dass wir die Reihen umordnen dürfen, weil Potenzreihen innerhalb ihres Konvergenzradius immer absolut konvergieren. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned} & x^2 J_n''(x) + x J_n'(x) + (x^2 - n^2) J_n(x) \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (2p+n)(2p+n-1) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (2p+n) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} \\ &+ x^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} - n^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} = \\ &= \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (2p+n)(2p+n-1) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} + \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p (2p+n) \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} \\ &+ \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^{p-1} \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n-1)!(p-1)!} - n^2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}}{(p+n)!p!} (4p^2 + 4pn + n^2 - 2p - n + 2p + n - 4p(n+p) - n^2) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

□

Aufgabe 4

Gegeben seien $a > 0$ und eine viermal stetig differenzierbare Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$.

a): Nach der Taylorformel mit Lagrange-Darstellung des Restglieds, angewandt auf f und auf $y \mapsto \int_0^y f(x)\,dx$, gilt

$$f(a) = f(0) + af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(0) + \frac{a^3}{6} f'''(0) + \frac{1}{6} \int_0^a f''''(x)(a-x)^3\,dx, \tag{15}$$

$$\int_0^a f(x)\,dx = af(0) + \frac{a^2}{2} f'(0) + \frac{a^3}{6} f''(0) + \frac{a^4}{24} f'''(0) + \frac{1}{24} \int_0^a f''''(x)(a-x)^4\,dx, \tag{16}$$

wobei der Term $\int_0^0 f(x)\,dx = 0$ nullter Ordnung in der letzten Gleichung gleich weggelassen wurde. Ebenso, wenn wir a durch $-a$ ersetzen:

$$\begin{aligned}f(-a) &= f(0) + (-a)f'(0) + \frac{(-a)^2}{2} f''(0) + \frac{(-a)^3}{6} f'''(0) + \frac{1}{6}\int_0^{-a} f''''(x)(-a-x)^3\,dx \\ &= f(0) - af'(0) + \frac{a^2}{2} f''(0) - \frac{a^3}{6} f'''(0) + \frac{1}{6}\int_{-a}^{0} f''''(x)(a-|x|)^3\,dx,\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}-\int_{-a}^{0} f(x)\,dx &= \int_0^{-a} f(x)\,dx \\ &= -af(0) + \frac{(-a)^2}{2} f'(0) + \frac{(-a)^3}{6} f''(0) + \frac{(-a)^4}{24} f'''(0) + \frac{1}{24}\int_0^{-a} f''''(x)(-a-x)^4\,dx \\ &= -af(0) + \frac{a^2}{2} f'(0) - \frac{a^3}{6} f''(0) + \frac{a^4}{24} f'''(0) - \frac{1}{24}\int_{-a}^{0} f''''(x)(a-|x|)^4\,dx.\end{aligned} \tag{18}$$

Bilden wir die Linearkombination (16) − (18) − $\frac{a}{3}$ · (17) − $\frac{4a}{3} f(0)$ − $\frac{a}{3}$ · (15), so erhalten wir:

$$\begin{aligned}R(a) &= \int_0^a f(x)\,dx + \int_{-a}^0 f(x)\,dx - \frac{a}{3} f(-a) - \frac{4a}{3} f(0) - \frac{a}{3} f(a) \\ &= \left[1 + 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3} - \frac{1}{3}\right] af(0) + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right] a^2 f'(0) \\ &\quad + \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{3\cdot 2} - \frac{1}{3\cdot 2}\right] a^3 f''(0) + \left[\frac{1}{24} - \frac{1}{24} - \frac{1}{3\cdot 6} + \frac{1}{3\cdot 6}\right] a^4 f'''(0) \\ &\quad + \frac{1}{24}\int_0^a f''''(x)(a-x)^4\,dx + \frac{1}{24}\int_{-a}^0 f''''(x)(a-|x|)^4\,dx \\ &\quad - \frac{a}{3\cdot 6}\int_{-a}^0 f''''(x)(a-|x|)^3\,dx - \frac{a}{3\cdot 6}\int_0^a f''''(x)(a-x)^3\,dx \\ &= \int_{-a}^a \left(\frac{1}{24}(a-|x|)^4 - \frac{a}{18}(a-|x|)^3\right) f''''(x)\,dx,\end{aligned}$$

also die gesuchte Integraldarstellung des Fehlerterms.

b): Zunächst beobachten wir für $-a \le x \le a$:

$$\frac{1}{24}(a-|x|)^4 - \frac{a}{18}(a-|x|)^3 = \frac{1}{72}(a-|x|)^3[3(a-|x|) - 4a] = -\frac{1}{72}(a-|x|)^3(a+3|x|) \le 0.$$

Damit ist der verallgemeinerte Mittelwertsatz der Integralrechnung auf die Integraldarstellung von $R(a)$ anwendbar und liefert: Es existiert $\xi \in [-a, a]$ mit

$$\begin{aligned}R(a) &= \int_{-a}^a \left(\frac{1}{24}(a-|x|)^4 - \frac{a}{18}(a-|x|)^3\right) f''''(x)\,dx = f''''(\xi)\int_{-a}^a \left(\frac{1}{24}(a-|x|)^4 - \frac{a}{18}(a-|x|)^3\right) dx \\ &= 2f''''(\xi)\int_0^a \left(\frac{1}{24}(a-x)^4 - \frac{a}{18}(a-x)^3\right) dx \qquad \text{(wg. Symmetrie)} \\ &= -2f''''(\xi)\int_a^0 \left(\frac{1}{24}t^4 - \frac{a}{18}t^3\right) dt \qquad (\text{mit } t := a - x) \\ &= 2f''''(\xi)\left[\frac{1}{24\cdot 5}t^5 - \frac{a}{18\cdot 4}t^4\right]_{t=0}^a \\ &= 2f''''(\xi)\left[\frac{a^5}{120} - \frac{a^5}{72}\right] = -\frac{a^5}{90} f''''(\xi).\end{aligned}$$

Bilden wir den Absolutbetrag hiervon und dann das Supremum über $\xi \in [-a, a]$, so folgt schließlich die gesuchte Fehlerabschätzung

$$|R(a)| \le \frac{a^5}{90} \sup_{x\in[-a,a]} |f''''(x)|.$$

c): Für eine Funktion $g : \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$ die den Radius des Fasses angibt, ist das Volumen des Fasses durch

$$V = \pi \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} g^2(x) \mathrm{d}x \tag{19}$$

gegeben. Einsetzen in die in Teilaufgabe a) gefundene Formel, ohne Berücksichtigung des Fehlerterms und unter Verwendung von $U = 2\pi r$ für Umfang und Radius eines Kreises, ergibt

$$V \approx \frac{h}{24\pi}(U_b^2 + 4U_m^2 + U_d^2). \tag{20}$$

Diese Formel wurde wohl von Johannes Keppler gefunden.