Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wie in T14.1 bezeichnen wir den Integranden in jeder Teilaufgabe als $f(x)$.

(a) Nach Umformung und Partialbruchzerlegung sehen wir, dass

$$f(x) = \frac{x^4 - 4x^3 + 3x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x - 1 - \frac{2x^2 - x - 2}{x^3 - 3x^2 + 2x} = x - 1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

was uns zu

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - x - \log|1-x| - 2\log|2-x| + \log|x|\right]_{-1}^{a} \\ &= \frac{a^2}{2} - a - \log(1-a) - 2\log(2-a) + \log(-a) - \frac{3}{2} + \log 18\end{aligned}$$

führt.

(b) Nach Umformung erhalten wir

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{16}{x^4+4} &= \frac{2(x+2)}{x^2+2x+2} - \frac{2(x-2)}{x^2-2x+2} \\ &= \frac{2x+2}{x^2+2x+2} - \frac{2x-2}{x^2-2x+2} + \frac{2}{(x+1)^2+1} + \frac{2}{(x-1)^2+1}\end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \big[\log(x^2+2x+2) - \log(x^2-2x+2) + 2\arctan(x+1) + 2\arctan(x+1)\big]_0^a \\ &= \log(a^2+2a+2) - \log(a^2-2a+2) + 2\arctan(a+1) + 2\arctan(a-1).\end{aligned}$$

(c) Es ist

$$\begin{aligned}f(x) = \frac{x^7 - x^6 + 3x^5 - 3x^4 + 3x^3 - 13x^2 + x - 3}{(1+x^2)^3} &= x - 1 - \frac{10x^2+2}{(x+x^2)^3} \\ &= x - 1 - \frac{2}{x^2+1} + \frac{1}{(x-i)^2} + \frac{1}{(x+i)^2} + \frac{i}{(x-i)^3} - \frac{i}{(x+i)^3},\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2} - x - 2\arctan x - \frac{2x}{x^2+1} + \frac{2x}{(x^2+1)^2}\right]_0^a \\ &= \left[\frac{x^2}{2} - x - 2\arctan x - \frac{2x^3}{(x^2+1)^2}\right]_0^a \\ &= \frac{a^2}{2} - a - 2\arctan a - \frac{2a^3}{(a^2+1)^2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $f(t) = \frac{\cosh t}{5\cosh t - 3\sinh t - 4}$.

(a) Wir setzen $y = 4\sinh t$. Dann ist $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 4\cosh t$ und $\cosh t = \frac{1}{4}\sqrt{16+y^2}$. Wir erhalten also

$$\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{4\sinh b} \frac{1}{5\sqrt{16+y^2} - 3y + 16}\,\mathrm{d}y.$$

Wir können nun T14.2 anwenden. Dort war $g(a) = \frac{\sqrt{a^2+16}-4}{a}$ definiert. Des Weiteren gilt $g(4\sinh b) = \frac{\cosh b - 1}{\sinh b} = \tanh(b/2) = \frac{2}{1+e^{-b}} - 1$. Also

$$\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{5}{6}\left(\frac{1}{1-3\tanh(b/2)} - 1\right) + \frac{1}{8}\log\left(\frac{(1-3\tanh(b/2))^3(1+\tanh(b/2))}{(1-\tanh(b/2))^4}\right).$$

Weitere Umformungen führen schließlich zu

$$\frac{5}{6}\left(\frac{1}{1-3\tanh(b/2)} - 1\right) = \frac{5}{4}\left(\frac{1}{2-e^b} - 1\right),$$
$$\log\left(\frac{(1-3\tanh(b/2))^3(1+\tanh(b/2))}{(1-\tanh(b/2))^4}\right) = b + 3\log(2-e^b).$$

(b) Wir beobachten, dass $\operatorname{arsinh}\frac{3}{4} = \log 2$. Mit der Substitution $s = e^t$ und $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t = e^t$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int f(t)\,\mathrm{d}t &= \int \frac{e^t + e^{-t}}{2e^t + 8e^{-t} - 8}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1+\frac{1}{s^2}}{2s + \frac{8}{s} - 8}\,\mathrm{d}s \\ &= \int \frac{s^2+1}{2s^3 - 8s^2 + 8s}\,\mathrm{d}s = \frac{1}{8}\left(\frac{10}{2-s} + 3\log|2-s| + \log s\right) + C,\end{aligned}$$

wobei der letzte Schritt mit Standardmethoden berechnet werden kann. Es ist also

$$\begin{aligned}\int_0^b f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{8}\left[\frac{10}{2-e^t} + 3\log|2-e^t| + t\right]_0^b \\ &= \frac{1}{8}\left(\frac{10}{2-e^b} + 3\log(2-e^b) + b - 10\right),\end{aligned}$$

was mit dem Ergebnis aus (a) übereinstimmt.

Aufgabe 3

(a) Für eine ähnliche Zeichnung siehe T14.2. Sei $R(x,y) = \frac{1}{3x-4y-25}$. Mit $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{10(1-t^2)}{(t^2+1)^2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\int_0^a R(x, \sqrt{25-x^2})\,\mathrm{d}x &= \int_0^{g(a)} R\left(\frac{10t}{1+t^2}, \frac{5(1-t^2)}{1+t^2}\right) \cdot \frac{10(1-t^2)}{(t^2+1)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^{g(a)} \frac{2t^2-2}{t^4 - 6t^3 + 10t^2 - 6t + 9}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{25}\left[6\log(3-t) - 3\log(t^2+1) + \frac{40}{3-t} - 8\arctan t\right]_0^{g(a)} \\ &= \frac{1}{25}\left(6\log(3-g(a)) - 3\log(g(a)^2+1) + \frac{40}{3-g(a)} - 8\arctan g(a) - \frac{40}{3} - 6\log 3\right),\end{aligned}$$

wobei hier $g(a) = \frac{5-\sqrt{25-a^2}}{a}$, d.h. wir betrachten jene Hälfte von K mit nichtnegativer y-Koordinate.

(b) Wir substituieren $x = 5\cos\varphi$, dann ist $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\varphi} = -5\sin\varphi$ und $\sin\varphi = \frac{1}{5}\sqrt{25-x^2}$. Dies führt zu

$$\int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\sin\varphi}{3\cos\varphi - 4\sin\varphi - 5}\,\mathrm{d}\varphi = -\int_0^{5\cos\alpha} \frac{1}{3x - 4\sqrt{25-x^2} - 25}\,\mathrm{d}x$$

Mit $g(5\cos\alpha) = \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}$ können wir das Integral nun durch Einsetzen in das Ergebnis aus (a) berechnen.

Aufgabe 4

Die Aussage ist trivial für $q = 0$, sei also $q \neq 0$. Wir betrachten zuerst den Fall $q > 0$. Das obere der beiden Integrale wird mit der folgenden Substitution betimmt

$$u^2 := 1 - \frac{1}{s} \Rightarrow s = \frac{1}{1-u^2} \wedge \mathrm{d}s = s^2 2u\mathrm{d}u. \tag{1}$$

Anschließend werden wir für die mit $*$ gekennzeichnete Gleichheit Polynomdivision durchführen. Es ist hierbei wichtig zu erkennen, dass $\frac{1}{q} - 1 > 0$ gilt.

$$\begin{aligned}
I(q) &= -\frac{2}{3}q^2 \int_1^\infty \frac{s+\frac{1}{2}}{s^2(s-q)}\sqrt{1-\frac{1}{s}}\mathrm{d}s = -\frac{2}{3}q^2 2\int_0^1 \frac{\frac{1}{1-u^2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{1-u^2}-q}u^2\mathrm{d}u \\
&= -\frac{4}{3}q^2 \int_0^1 \frac{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}u^2}{1-q+qu^2}u^2\mathrm{d}u = -\frac{4}{3}q\int_0^1 \frac{-\frac{1}{2}u^4+\frac{3}{2}u^2}{u^2+\frac{1}{q}-1}\mathrm{d}u \\
&= \frac{2}{3}q\int_0^1 \frac{u^4-3u^2}{u^2+\frac{1}{q}-1}\mathrm{d}u \stackrel{*}{=} \frac{2}{3}q\int_0^1 \left(u^2 - \left(2+\frac{1}{q}\right) + \frac{\left(2+\frac{1}{q}\right)\left(\frac{1}{q}-1\right)}{u^2+\frac{1}{q}-1}\right)\mathrm{d}u \\
&= \left(\frac{2}{9}qu^3 - \frac{2}{3}q\left(2+\frac{1}{q}\right)u\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3}(2q+1)\frac{\frac{1}{q}-1}{\frac{1}{q}-1}\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+\left(\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{q}-1}}\right)^2} \qquad (2) \\
&= \frac{2}{9}q - \frac{4}{3}q - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(2q+1)\int_0^1 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\sqrt{\frac{1}{q}-1}\arctan\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{q}-1}}\mathrm{d}u \\
&= -\frac{10}{3}q - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(2q+1)\sqrt{\frac{1}{q}-1}\arctan\frac{u}{\sqrt{\frac{1}{q}-1}}\Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{10}{3}q - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}(2q+1)\sqrt{\frac{1}{q}-1}\arctan\sqrt{\frac{q}{1-q}}
\end{aligned}$$

Für den Fall $q < 0$ sind alle Umformungen bis zur 3. Zeile gleich, danach folgt eine weitere Partialbruchzerlegung. Damit ergibt sich

$$\begin{aligned}
I(q) &= \left(\frac{2}{9}qu^3 - \frac{2}{3}q\left(2+\frac{1}{q}\right)u\right)\Bigg|_0^1 + \frac{2}{3}\frac{1}{q}\int_0^1 \frac{(2q+1)(q-1)}{u^2-\left(\sqrt{-\frac{1}{q}+1}\right)^2}\mathrm{d}u \\
&= -\frac{10}{3}q - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\frac{(2q+1)(q-1)}{q}\frac{1}{2\sqrt{-\frac{1}{q}+1}}\int_0^1 \left(\frac{1}{u-\sqrt{-\frac{1}{q}+1}} - \frac{1}{u+\sqrt{-\frac{1}{q}+1}}\right)\mathrm{d}u \\
&= -\frac{10}{3}q - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(2q+1)\sqrt{1-\frac{1}{q}}\left(\ln\left(-u+\sqrt{1-\frac{1}{q}}\right) - \ln\left(u+\sqrt{1-\frac{1}{q}}\right)\right)\Bigg|_0^1 \\
&= -\frac{10}{3}q - \frac{2}{3} + \frac{1}{3}(2q+1)\sqrt{1-\frac{1}{q}}\ln\left(\sqrt{-q+1}-\sqrt{-q}\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Das zweite Integral ist etwas langwieriger. Wir unterscheiden wieder ob q positiv oder negativ ist. Im ersten fall integrieren wir zuerst partiell um das Produkt aus einem Polynom mit dem Logarithmus in eine gebrochen rationale Funktion zu verwandeln. Anschließend folgt Polynomdivision (bei der mit $*$ gekennzeichneten Gleichheit) und schließlich identifizieren wir im Nenner wieder die Struktur "$1+\alpha^2$".

$$\begin{aligned}
J(q) &= 4q\int_0^1 (z-z^2)\ln(1-4q(z-z^2))\mathrm{d}z \\
&= 4q\left(\frac{z^2}{2}-\frac{z^3}{3}\right)\ln(1-4q(z-z^2))\Big|_0^1 - 4q\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3}{1-4q(z-z^2)}(-4q)(1-2z)\mathrm{d}z \\
&= 16q^2\int_0^1 \frac{\frac{1}{2}z^2-\frac{1}{3}z^3-z^3+\frac{2}{3}z^4}{1-4q(z-z^2)}\mathrm{d}z = 4q\int_0^1 \frac{\frac{2}{3}z^4-\frac{4}{3}z^3+\frac{1}{2}z^2}{z^2-z+\frac{1}{4q}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{2}{3}q\int_0^1 \frac{4z^4-8z^3+3z^2}{z^2-1+\frac{1}{4q}}\mathrm{d}z \overset{*}{=} \frac{2}{3}q\int_0^1\left[4z^2-4z-\left(1+\frac{1}{q}\right)-\frac{z-\frac{1}{4q}\left(1+\frac{1}{q}\right)}{z^2-z+\frac{1}{4q}}\right]\mathrm{d}z \\
&= \left(\frac{8}{9}qz^3-q\frac{4}{3}qz^2-\frac{2}{3}zq\left(1+\frac{1}{q}\right)\right)\Big|_0^1-\frac{2}{3}q\int_0^1\frac{(2z-1)\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4q}\left(1+\frac{1}{q}\right)}{z^2-z+\frac{1}{4q}}\mathrm{d}z \\
&= \frac{8}{9}q-\frac{4}{3}q-\frac{2}{3}(q+1)-\frac{1}{3}q\ln\left(z^2-z+\frac{1}{4q}\right)\Big|_0^1+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\frac{1}{q}+1-2q}{z^2-z+\frac{1}{4q}}\mathrm{d}z \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\frac{1}{q}+1-2q}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+\frac{1}{4q}}\mathrm{d}z = -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\int_0^1\frac{\frac{1}{q}+1-2q}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{q}-1\right)}\mathrm{d}z \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}\frac{1}{6}\left(\frac{1}{q}+1-2q\right)\frac{4}{\frac{1}{q}-1}\int_0^1\frac{\mathrm{d}z}{1+\left(\frac{z-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{q}-1\right)}}\right)^2} \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{q}+1-2q\right)\frac{2q}{1-q}\int_0^1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\arctan\left((2z-1)\sqrt{\frac{q}{1-q}}\right)\mathrm{d}z\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{q}-1} \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{-1}{3}(2q+1)(q-1)\frac{q}{1-q}\arctan\left((2z-1)\sqrt{\frac{q}{1-q}}\right)\Big|_0^1 \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}(2q+1)\sqrt{\frac{1}{q}-1}\arctan\sqrt{\frac{q}{1-q}}
\end{aligned} \tag{4}$$

Falls $q<0$ ist, machen wir alle Umformungen bis zur 7. Zeile identisch und machen dann wieder eine Partialbruchzerlegung analog zum ersten Integral. Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
J(q) &= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\frac{(2q+1)(1-q)}{q}\int_0^1\frac{1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\sqrt{1-\frac{1}{q}}^2}\mathrm{d}z \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}\frac{(2q+1)(1-q)}{q}\frac{4}{2\sqrt{1-\frac{1}{q}}}\int_0^1\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{q}}}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{q}}}\right)\mathrm{d}z \\
&= -\frac{10}{9}q-\frac{2}{3}-\frac{1}{3}(2q+1)\sqrt{1-\frac{1}{q}}\int_0^1\left(\frac{1}{z-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{q}}}-\frac{1}{z-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{1}{q}}}\right)\mathrm{d}z \\
&= -\frac{10}{3}q-\frac{2}{3}+\frac{1}{3}(2q+1)\sqrt{1-\frac{1}{q}}\ln\left(\sqrt{-q+1}-\sqrt{-q}\right)
\end{aligned} \tag{5}$$

Die Ergebnisse stimmen jeweils überein.

Aufgabe 5

(a) Aus T12.1 haben wir

$$\frac{te^{xt}}{e^t - 1} = f(t,x) = \sum_{j=0}^{n} B_j(x)\frac{t^j}{j!} + \mathcal{O}(t^{n+1}), \quad t \to 0,$$

und folglich

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(t,x) = t \cdot f(t,x) &= \sum_{j=1}^{n+1} \frac{B_{j-1}(x)}{(j-1)!} t^j + \mathcal{O}(t^{n+2}) \\ &= \sum_{j=0}^{n+1} \frac{B_j'(x)}{j!} t^j + \mathcal{O}(t^{n+2}), \quad t \to 0,\end{aligned}$$

wobei die zwei Identitäten der Ableitung von den zwei Identitäten für f herrühren. Koeffizientenvergleich für $j = n+1$ ergibt genau $\frac{B_n(x)}{n!} = \frac{B'_{n+1}(x)}{(n+1)!}$ bzw. $B'_{n+1}(x) = (n+1)B_n(x)$.

(b) Mit dem HDI und Teilaufgabe (a) gilt

$$B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0) = \int_0^1 B'_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = (n+1)\int_0^1 B_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Nutzen wir T14.4 mit $m = 1$, so erhalten wir direkt $0 = B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)$, woraus sich die verbleibenden Folgerungen ergeben.

(c) Mit dem Hinweis können wir beide Seiten entwickeln, wobei wir $\frac{(-t)e^{0\cdot(-t)}}{e^{-t}-1}$ als $f_0(-t)$ auffassen. Wie in T12.1 erhalten wir

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n} B_j(0)\frac{(-t)^j}{j!} + \mathcal{O}(t^{n+1}) &= \sum_{j=0}^{n} \left[(-1)^j B_j(0)\right] \frac{t^j}{j!} + \mathcal{O}(t^{n+1}) \\ &= \sum_{j=0}^{n} B_j(1)\frac{t^j}{j!} + \mathcal{O}(t^{n+1}).\end{aligned}$$

In der zweiten Zeile wurde $\frac{te^t}{e^t-1}$ entwickelt. Die Aussage folgt erneut durch Koeffizientenvergleich für $j = n$.

Für $n \geq 2$ ungerade impliziert $B_n(1) = B_n(0)$ (wiederum aus (b) bekannt) zusammen mit $B_n(1) = -B_n(0)$, dass $B_n(0) = 0 = B_n(1)$.

(d) Wir führen zuerst die Notation

$$S_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[\frac{B_{k+1}(1)}{(k+1)!} f^{(k)}(1) - \frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!} f^{(k)}(0)\right] = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k \left[\frac{B_{k+1}(x)}{(k+1)!} f^{(k)}(x)\right]_0^1$$

$$R_n(f) := (-1)^n \int_0^1 \frac{B_n(x)}{n!} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x$$

ein, wobei wir in dieser Teilaufgabe $S_n = S_n(f)$ und $R_n = R_n(f)$ schreiben. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist trivial, gelte die Aussage also für $n \geq 0$. Mit der Induktionsorausetzung folgt, dass $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = S_n + R_n$. Wir wenden nun das Ergebnis aus Teilaufgabe (a) sowie partielle Ingeration an und erhalten

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x &= S_n + (-1)^n \int_0^1 \frac{B'_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= S_n + (-1)^n \left[\frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n)}(x)\right]_0^1 + (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{B_{n+1}(x)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x)\,\mathrm{d}x \\ &= S_{n+1} + R_{n+1}.\end{aligned}$$

Dies beschließt den Induktionsschritt. Mit $B_1(1) = 1/2$ und $B_1(0) = -1/2$ sowie der Identität aus Teilaufgabe (c) gilt des Weiteren

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{f(1)+f(0)}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k \left[\frac{(-1)^{k+1} B_{n+1}(0)}{(n+1)!} f^{(n)}(1) - \frac{B_{n+1}(0)}{(n+1)!} f^{(n)}(0) \right] \\ &= \frac{f(1)+f(0)}{2} - \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k \text{ ungerade}\}} \frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!} \left[f^{(k)}(1) - f^{(k)}(0) \right]. \end{aligned}$$

Hierbei wurde in der zweiten Zeile verwendet, dass $B_{k+1}(1) = B_{k+1}(0) = 0$ für k gerade, die entsprechenden Summanden also wegfallen.

(e) Es ist

$$\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{m-1} \int_l^{l+1} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^1 f(x+l)\,\mathrm{d}x.$$

Wir wenden nun Teilaufgabe (d) auf die Funktionen $g_l(x) := f(x+l)$ an und erhalten

$$\int_0^m f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{l=0}^{m-1} (S_n(g_l) + R_n(g_l)).$$

Dabei ist

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{m-1} S_n(g_l) &= \sum_{l=0}^{m-1} \frac{g_l(1) - g_l(0)}{2} - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k \text{ ungerade}\}} \frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!} \left[g_l^{(k)}(1) - g_l^{(k)}(0) \right] \\ &= \sum_{l=0}^{m-1} \frac{f(l+1) - f(l)}{2} - \sum_{l=0}^{m-1} \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{\{k \text{ ungerade}\}} \frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!} \left[f^{(k)}(l+1) - f^{(k)}(l) \right]. \end{aligned}$$

In der Doppelsumme ist die innere Summe eine Teleskopsumme und fällt zusammen zu

$$\mathbb{1}_{\{k \text{ ungerade}\}} \frac{B_{k+1}(0)}{(k+1)!} \left[f^{(k)}(m) - f^{(k)}(0) \right],$$

woraus das zu Zeigende folgt.