Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

a): Seien $a, \omega, \lambda > 0$ gegeben. Wir verwenden den gleichen Trick wie im Tutorium. Die Funktion $x \mapsto e^{-\lambda x}\sin(\omega x)$ ist der Imaginärteil der Funktion $x \mapsto e^{(-\lambda+i\omega)x}$ und deren Stammfunktion ist $x \mapsto g(x) := \frac{1}{-\lambda+i\omega}e^{(-\lambda+i\omega)x}$; deshalb leiten wir den Imaginärteil dieser Fuktion ab. Es ergibt sich

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda^2+\omega^2}\left(-\lambda\sin(\omega x)-\omega\cos(\omega x)\right) = e^{-\lambda x}\sin(\omega x). \tag{1}$$

Daher gilt für das Integral

$$\int_0^a e^{-\lambda x}\sin(\omega x)\mathrm{d}x = \frac{e^{-\lambda a}}{\lambda^2+\omega^2}\left(-\lambda\sin(\omega a)-\omega(\cos(\omega a)-e^{\lambda a})\right). \tag{2}$$

b): Sei $a > 0$ gegeben. Wir lösen das Integral mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_1^a x^n \ln x\mathrm{d}x &= \frac{1}{n+1}x^{n+1}\ln x\Big|_{x=1}^a - \int_1^a \frac{1}{n+1}x^{n+1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n+1}a^{n+1}\ln a - \left(\frac{1}{(n+1)^2}x^{n+1}\Big|_{x=1}^a\right) \\ &= \frac{1}{n+1}a^{n+1}\ln a - \frac{1}{(n+1)^2}\left(a^{n+1}-1\right).\end{aligned} \tag{3}$$

c): Sei $a > 0$ gegeben. Auch dieses Integral lösen wir mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^a x\arctan x\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}x^2\arctan x\Big|_{x=0}^a - \int_0^a \frac{1}{2}\frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}a^2\arctan a - \frac{1}{2}\int_0^a\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}a^2\arctan a - \frac{1}{2}\left(a-\arctan a\right) \\ &= \frac{1}{2}(a^2+1)\arctan a - \frac{a}{2}\end{aligned} \tag{4}$$

d): Sei $0 < a < 1$ gegeben. Auch dieses Integral lösen wir mit partieller Integration. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^a \arcsin x\mathrm{d}x &= x\arcsin x|_{x=0}^a - \int_0^a \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= a\arcsin a + \sqrt{1-x^2}\Big|_{x=0}^a \\ &= a\arcsin a + \sqrt{1-a^2} - 1.\end{aligned} \tag{5}$$

e): Sei $a > 0$ gegeben. Wir erinnern uns an T11.1 und berechnen

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{1-e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x &= \int_0^a\left(\frac{1}{1+e^x}-\frac{e^x}{1+e^x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^a \frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\mathrm{d}x - \int_0^a\frac{e^x}{1+e^x}\mathrm{d}x \\ &= -\ln\left(1+e^{-x}\right)\big|_{x=0}^a - \ln\left(1+e^x\right)\big|_{x=0}^a \\ &= -\ln\left(1+e^{-a}\right) - \ln\left(1+e^a\right) + 2\ln 2.\end{aligned} \tag{6}$$

Aufgabe 2

a): Wir beobachten, dass die Funktion f sich mit $y := \ln x$ als

$$f(x) = y' \frac{1}{y^2} \tag{7}$$

schreiben lässt. Daher ist $F(x) = \frac{-1}{y} = \frac{-1}{\ln x}$ eine Stammfunktion.

b): Wir verwenden die Notation der Definition des Riemann-Integrals. Sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n > 3$ gegeben. Es gilt

$$F(n) - F(2) = \int_2^n f(x)\mathrm{d}x = \sup_{\substack{g \in \mathcal{T}[2,n] \\ g \leq f}} \int_2^n g(x)\mathrm{d}x. \tag{8}$$

Wir wählen die Treppenfunktion

$$g : [2, \infty[\to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{(\lfloor x \rfloor + 1)\left(\ln(\lfloor x \rfloor + 1)\right)^2}, \tag{9}$$

diese ist kleiner als f. Damit gilt insgesamt

$$\int_2^n g(x)\mathrm{d}x = \sum_{n=3}^{n} \frac{1}{n(\ln n)^2} \leq \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}\mathrm{d}x = \frac{-1}{\ln n} + \frac{1}{\ln 2}. \tag{10}$$

Damit konvergiert die Reihe, weil alle Partialsummen kleiner als $\frac{1}{\ln 2}$ sind. $\square$

Aufgabe 3

Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Wir berechnen die k-te Ableitung der angegebenen Funktion, es gilt

$$\frac{\mathrm{d}^k}{(\mathrm{d}x)^k}(1+x)^\alpha \bigg|_{x=0} = \prod_{l=0}^{k-1} (\alpha - l). \tag{11}$$

Einsetzen in die Formel aus Aufgabe H12.1c) ergibt

$$\begin{aligned}(1+x)^\alpha &= \sum_{n=0}^{m} \frac{\prod_{l=0}^{n-1}(\alpha - l)}{n!} x^n + o(|x^m|) \\ &= \sum_{n=0}^{m} \binom{\alpha}{n} x^n + o(|x^m|)\end{aligned} \tag{12}$$

Aufgabe 4

Wir halten uns an den Tipp und lösen erst das angegebene Integral mittels Substitution. Sei $t \in \mathbb{R}$ gegeben, dann gilt

$$\int_0^t \frac{y'}{y}\mathrm{d}x = \int_{y(0)}^{y(t)} \frac{1}{u}\mathrm{d}u = \ln y(t). \tag{13}$$

Nun formen wir die Differentialgleichung um, sodass das eben gelöste Integral auftaucht, es folgt

$$\begin{aligned} & y = (1+x^2)y' \Rightarrow \frac{y'(x)}{y(x)} = \frac{1}{1+x^2} \\ & \Rightarrow \int_0^t \frac{y'(x)}{y(x)}\mathrm{d}x = \int_0^t \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ & \Rightarrow \ln y(t) = \arctan x \Rightarrow y(t) = e^{\arctan x}. \end{aligned} \tag{14}$$

$\square$

Aufgabe 5

a): Seien $0 < b < a$ gegeben. Das Integral lässt sich mittels der Substitution $z := \cos t$ umformen, es gilt

$$\begin{aligned} U(a,b) &= a\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = 2a\int_0^{\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t \\ &= 2a\int_1^{-1} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}}{-\sin t}\mathrm{d}z = 2a\int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-\varepsilon^2 z^2}}{\sqrt{1-z^2}}\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{15}$$

$\square$

b): Wir verwenden die Aufgabe H10.2 um den Integranden abzuschätzen. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \left(1-\frac{\varepsilon^2}{2}\cos^2 t + o(\varepsilon^2)\right)\mathrm{d}t \\ &\overset{*}{=} 2\pi - \frac{\varepsilon^2}{4}\int_0^{2\pi}(1+\cos(2t))\mathrm{d}t + o(\varepsilon^2) \\ &= 2\pi - \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2), \end{aligned} \tag{16}$$

wobei für die mit $*$ gekennzeichnete Gleichung das folgende Additionstheorem für den Kosinus verwendet wurde,

$$\cos(t+t) = \cos t\cos t - \sin t \sin t = \cos^2 t - 1 + \cos^2 t = 2\cos^2 t - 1. \tag{17}$$

c): Mit Aufgabe 13.3 können wir die Wurzel in eine Potenzsumme umwandeln, damit gilt

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi}\left(\sum_{n=0}^{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\varepsilon^{2n}\cos^{2n} t + o(|\varepsilon^{2n}|)\right)\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=0}^{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\varepsilon^{2n}\int_0^{2\pi}\cos^{2n} t\mathrm{d}t + o(|\varepsilon^{2n}|) \\ &= \sum_{n=0}^{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\varepsilon^{2n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^{2n}\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\mathrm{d}t + o(|\varepsilon^{2n}|) \\ &= \sum_{n=0}^{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\varepsilon^{2n}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\sin^{2n} t\mathrm{d}t + o(|\varepsilon^{2n}|). \end{aligned} \tag{18}$$

Weil der Sinus periodisch ist, ist das letzte Integral gleich dem mit Integrationsbereich $[0, 2\pi]$. Wir können also Aufgabe T13.2 verwenden. Es ergibt sich

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1-\varepsilon^2\cos^2 t}\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{m}\binom{\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\varepsilon^{2n}\binom{2n}{n}\frac{2\pi}{4^n} + o(|\varepsilon^{2n}|). \tag{19}$$

$\square$