Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

(a) Wir zeigen mit Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$, dass die Aussage für *alle* Funktionen g, welche die geforderten Bedingungen erfüllt, gilt. Für den Induktionsanfang $n = 0$ ist gegeben, dass g stetig ist und $g(0) = 0$, während zu zeigen ist, dass $g(x) = \mathcal{O}(1)$ für $x \to 0$. Es gilt jedoch sogar $g(x) = o(1)$ für $x \to 0$, denn $\lim_{x\to 0} g(x) = 0$ folgt aus der Stetigkeit von g.

Gelte für den Induktionsschritt die Aussage also nun für *alle* Funktionen, die entsprechende Bedingungen für $n \geq 0$ erfüllen. Sei eine $(n+1)$-fach stetig differenzierbare Funktion g mit $g^{(j)} = 0$ für $0 \leq j \leq n$ gegeben. Sei weiterhin $x \in \mathbb{R}$. Aufgrund des Mittelwertsatzes existiert ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $|\xi| < |x|$, sodass

$$g(x) = g(x) - g(0) = g'(\xi)(x-0) = g'(\xi) \cdot x.$$

Nun ist g' eine n-fach stetig differenzierbare Funktion, auf die sich die Induktionsannahme anwenden lässt. Da außerdem $\xi \xrightarrow{x\to 0} 0$, gilt nach Annahme

$$g'(\xi) = \mathcal{O}(|\xi|^n) = \mathcal{O}(|x|^n) \qquad \text{für } |\xi| < |x| \to 0.$$

Doch dies impliziert direkt das Resultat $g(x) = \mathcal{O}(|x|^{n+1})$ für $x \to 0$, was den Induktionsschritt abschließt.

(b) Wir beweisen die Aussage mit Induktion über $k \in \mathbb{N}_0$. Für den Anfang $k = 0$ ist zu zeigen, dass

$$\left.\frac{d^j}{dx^j} 1\right|_{x=0} = \mathbb{1}_{\{j=0\}}.$$

Dies ist wahr, da $1^{(j)} \equiv 0$ für alle $j > 0$. Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für $k \geq 0$ und sei $f(x) = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!}$. Sei zuerst $j = 0$. Dann ist $\frac{d^0}{dx^0} f(x) = f(x)$ und $f(0) = 0$. Sei also $j > 0$. Es gilt

$$\left.\frac{d^j}{dx^j} f(x)\right|_{x=0} = \left.\frac{d^{j-1}}{dx^{j-1}} \frac{x^k}{k!}\right|_{x=0} \overset{\text{IV}}{=} \mathbb{1}_{\{k=j-1\}} = \mathbb{1}_{\{k+1=j\}},$$

was den Induktionsschritt abschließt.

(c) Mit f und g wie in der Angabe und $0 \leq j \leq n-1$ gilt

$$\begin{aligned} g^{(j)}(0) &= f^{(j)}(0) - \left.\frac{d^j}{dx^j} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \right|_{x=0} = f^{(j)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \left.\frac{d^j}{dx^j} \frac{x^k}{k!}\right|_{x=0} \\ &\overset{\text{(b)}}{=} f^{(j)}(0) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0) \mathbb{1}_{\{k=j\}} = f^{(j)}(0) - f^{(j)}(0) = 0. \end{aligned}$$

Hierbei wurde die Linearität der Ableitung verwendet. Die Funktion g erfüllt also die Bedingungen aus Teilaufgabe (a) und es ist $g(x) = \mathcal{O}(|x|^n)$. Einsetzen in die Definition von g und Umstellen liefert das Ergebnis.

Aufgabe 2

(a) Wir setzen $x = \cos y$ und damit $y = \arccos x$. Wir betrachten $y \downarrow 0$ und damit $x \uparrow 1$. Es gilt

$$x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{y^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{y^2}{2} + \mathcal{O}(y^4). \tag{1}$$

Dies lässt sich umformen zu $2 - 2x = y^2 + \mathcal{O}(y^4)$ und damit zu

$$\sqrt{2-2x} = \sqrt{y^2 + \mathcal{O}(y^4)} = y\sqrt{1 + \mathcal{O}(y^2)}.$$

Als Konsequenz von H10.2 gilt $\sqrt{1 + \mathcal{O}(y^2)} = 1 + \mathcal{O}(y^2)$ und wir erhalten

$$\sqrt{2-2x} = y + \mathcal{O}(y^3). \tag{2}$$

Aus (1) erhalten wir zudem $2(1-x) = y^2 + o(y^2)$. Für y klein genug ist $|o(y^2)| < y^2/2$ und damit

$$\frac{4}{3}(1-x) \le y^2 \le 4(1-x),$$

was uns $y = \mathcal{O}(\sqrt{1-x})$ gibt. Setzen wir nun dies in (2) ein, so erhalten wir

$$\sqrt{2-2x} = y + \mathcal{O}((1-x)^{3/2}).$$

Da $y = \arccos x$, ist die zu zeigende Aussage bewiesen.

(b) Der Beweis erfolgt komplett analog zu (a).

Aufgabe 3

(a) Mit $h(x) = \log(1+x)$ sehen wir, dass h für $x \to 0$ zweimal stetig differenzierbar ist, wobei $h'(x) = (1+x)^{-1}$ und $h''(x) = -(1+x)^{-2}$. Insbesondere lässt sich Teilaufgabe H12.1(c) anwenden und wir erhalten

$$h(x) = h(0) + h'(0)x + \tfrac{1}{2}h''(0)x^2 + \mathcal{O}(|x|^3) = x - \tfrac{1}{2}x^2 + o(x^2).$$

(b) Da für $x \to 0$ auch $f(x) \to 0$, gilt

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= f(x) - \tfrac{1}{2}f(x)^2 + o(f(x)^2) \\ &= 2x + 3x^2 + o(x^2) - \tfrac{1}{2}(2x + o(x))^2 + o(x^2) = 2x + 3x^2 - 2x^2 + o(x^2) \\ &= 2x + x^2 + o(x^2). \end{aligned}$$

(c) Es ist $h(x) = \arctan(x)$ dreimal stetig differenzierbar mit $h'(x) = (1+x^2)^{-1}, h''(x) = -2x(1+x^2)^{-2}$ und $h'''(x) = (6x^2-2)(1+x^2)^{-3}$. Auch hier wenden wir wieder H12.1(c) an und erhalten für $x \to 0$

$$h(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{h^{(k)}(0)}{k!}x^k + o(x^3) = x - \tfrac{1}{3}x^3 + o(x^3).$$

Analog zu (b) ergibt sich für $x \to 0$

$$\begin{aligned} h(f(x)) &= f(x) - \tfrac{1}{3}(2x + o(x))^3 + o(f(x)^3) = 2x + 3x^2 + 4x^3 - \tfrac{8}{3}x^3 + o(x^3)) \\ &= 2x + 3x^2 + \tfrac{4}{3}x^3 + o(x^3). \end{aligned}$$

Aufgabe 4

(a) Wir zeigen die Aussage für *alle* glatten Funktionen f, g via Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$. Der Induktionsanfang $n = 0$ ist klar, denn

$$(fg)^{(0)} = fg = \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} f^{(k)} g^{(-k)}.$$

Für den Induktionsschritt gelte die Aussage für $n \geq 0$. Es ist

$$(fg)^{(n+1)} = (f'g + g'f)^{(n)}.$$

Da sowohl f' als auch g' glatt sind, sind auch $f'g$ und $g'f$ glatt. Die Induktionsannahme lässt sich also auf diese beiden Funktionen anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned}
(fg)^{(n)} &= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} (f')^{(k)} g^{(n-k)} + f^{(k)} (g')^{(n-k)} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \left(\binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + f^{(k)} g^{(n+1-k)} \right) \\
&= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} f^{(k+1)} g^{(n-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} f^{(k)} g^{(n+1-k)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= f^{(n+1)} g + g^{(n+1)} f + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)} g^{(n+1-k)},
\end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Wir beginnen mit einer Beobachtung. Sei dafür $n \in \mathbb{N}_0$, $k_m \in \mathbb{N}_0$ mit $k_m \leq n$ und $(k_1, \ldots, k_{m-1}) \in M_{m-1, n-k_m}$. Dann ist $(k_1, \ldots, k_m) \in M_{m,n}$ und außerdem

$$\binom{n}{k_m} \mathrm{mult}(k_1, \ldots, k_{m-1}) = \frac{n!}{(n-k_m)! k_m!} \cdot \frac{(n-k_m)!}{\prod_{j=1}^{m-1} k_j!} = \mathrm{mult}(k_1, \ldots, k_m). \tag{3}$$

Wir zeigen die Aussage nun via Induktion über $m \in \mathbb{N}$ und nutzen dabei Teilaufgabe (a). Den Induktionsanfang $m = 1$ ist klar. Sei nun $m > 1$ und gelte die Aussage für alle $l < m$. Wir definieren $g_m := \prod_{j=1}^{m-1} f_j$ und sehen, dass g_m als Produkt glatter Funktionen glatt ist. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=1}^{m} f_j \right)^{(n)} &= (g_m \cdot f_m)^{(n)} \overset{\text{(a)}}{=} \sum_{l=0}^{n} \binom{n}{l} f_m^{(l)} g_m^{(n-l)} \\
&\overset{\text{IV}}{=} \sum_{k_m=0}^{n} \binom{n}{k_m} f_m^{(k_m)} \cdot \left(\sum_{(k_1, \ldots, k_{m-1}) \in M_{m-1, n-k_m}} \mathrm{mult}(k_1, \ldots, k_{m-1}) \prod_{j=1}^{m-1} f_j^{(k_j)} \right) \\
&= \sum_{k_m=0}^{n} \sum_{(k_1, \ldots, k_{m-1}) \in M_{m-1, n-k_m}} \binom{n}{k_m} \mathrm{mult}(k_1, \ldots, k_{m-1}) f_m^{(k_m)} \cdot \prod_{j=1}^{m-1} f_j^{(k_j)} \\
&\overset{(3)}{=} \sum_{(k_1, \ldots, k_m) \in M_{m,n}} \mathrm{mult}(k_1, \ldots, k_m) \prod_{j=1}^{m} f_j^{(k_j)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

(a) Mit H12.1(c) erhalten wir die Darstellung $f(x) = 1 + \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2) =: h(x) - 1$ für $x \to 0$, mit H12.3 eine Darstellung für Funktionen der Form $\log(1 + h(x))$ für $h(x) \to 0$. Dies führt uns zu

$$\log f(x) = \log(1 + h(x)) = \frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2).$$

(b) Aus Teilaufgabe (a) erhalten wir für $x \to 0$ die Darstellung

$$f(x) = e^{\frac{x^2}{2} f''(0) + o(x^2)}.$$

Betrachten wir nun $\frac{x}{\sqrt{n}}$ klein genug, was für $x \in \mathbb{R}$ und n hinreichend groß der Fall ist, so gilt

$$f\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^n = e^{n\left(\frac{x^2}{2n} f''(0) + o(\frac{x^2}{n})\right)} = e^{\frac{1}{2} f''(0) x^2 + o(1)} = e^{\frac{1}{2} f''(0) x^2} e^{o(1)},$$

wobei $e^{o(1)}$ für $\frac{x}{\sqrt{n}} \to 0$ gilt. Da dies für $n \to \infty$ der Fall ist, folgt die Aussage mit $e^{o(1)} \xrightarrow{n \to \infty} 1$.

(c) Die Kosinus-Funktion ist glatt (also insbesondere dreimal stetig differenzierbar) und es gilt $\cos''(0) = -\cos(0) = -1$. Einsetzen in die in (b) hergeleitete Gleichung liefert das Resultat.

Aufgabe 6

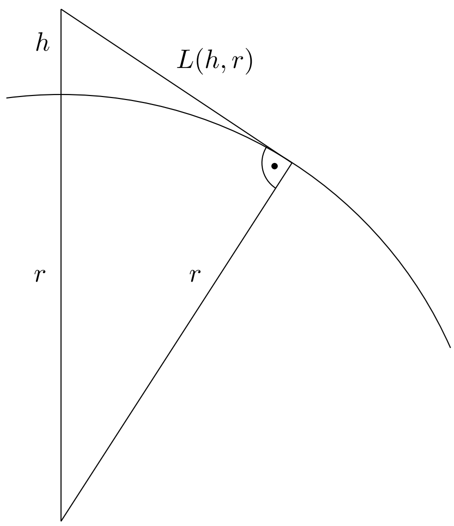

Abbildung 1: Geometrische Skizze der Aufgabe

Aus Abbildung 1 geht hervor, dass mit einer Anwendung des Satzes des Pythagoras $L(h, r)^2 = (r + h)^2 - r^2 = 2rh + h^2$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} L(h, r) &= \sqrt{2rh + h^2} = \sqrt{2rh}\sqrt{1 + \tfrac{h}{2r}} = \sqrt{2rh}\sqrt{1 + \mathcal{O}(\tfrac{h}{r})} \\ &\overset{(*)}{=} \sqrt{2rh} \cdot \left(1 + \mathcal{O}\left(\tfrac{h}{r}\right)\right), \end{aligned}$$

wobei die $\mathcal{O}$-Notation für $h/r \to 0$ gilt und in (*) Aufgabe H10.2 verwendet wurde. Es ist also $c = \sqrt{2}, a = b = 1/2$.
Die exakte Berechnung ergibt $L(10, 6370000) = 11287,16528$, die Näherung dagegen $11287,16085$.