Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Die Ableitungen der Funktionen in Frage sind:

a):
$$f_1'(x) = \ln x + 1 \tag{1}$$

b):
$$f_2'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{\prod_{k=0}^{n-1} x-k}{n!} = \frac{1}{n!} \sum_{l=0}^{n-1} \prod_{\substack{k=0\\k\neq l}}^{n-1} (x-k) \tag{2}$$

c):
$$f_3'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{x^x \ln x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} e^{e^{x\ln x}\ln x} = x^{x^x}(x^{x-1} + x^x(1+\ln x)\ln x) \tag{3}$$

d):
$$\begin{aligned} f_4'(\varphi) = & \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{(a+\cos\varphi)^2 + (b+\sin\varphi)^2}} - \frac{(a+\cos\varphi)((-\sin\varphi)(a+\cos\varphi) + \cos\varphi(b+\sin\varphi))}{\sqrt{(a+\cos\varphi)^2+(b+\sin\varphi)^2}^3} \\ & = \frac{-\sin\varphi}{\sqrt{(a+\cos\varphi)^2 + (b+\sin\varphi)^2}} - \frac{(a+\cos\varphi)(-a\sin\varphi + b\cos\varphi)}{\sqrt{(a+\cos\varphi)^2+(b+\sin\varphi)^2}^3} \end{aligned} \tag{4}$$

e):
$$f_5'(x) = f_5(x)\frac{-x}{\sigma^2} \tag{5}$$

f):
$$f_6'(\sigma) = f_6(\varphi)\left(\frac{-1}{\sigma} + \frac{x^2}{\sigma^3}\right) \tag{6}$$

g):
$$\begin{aligned} f_7'(x) = \sqrt{2\pi}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sqrt{x}e^{x(\ln(x)-1)} &= \sqrt{2\pi}\left(\frac{1}{2}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x} + x^{x+\frac{1}{2}}e^{-x}\ln(x)\right) \\ &= \sqrt{2\pi}x^{x-\frac{1}{2}}e^{-x}\left(\frac{1}{2} + x\ln(x)\right) \end{aligned} \tag{7}$$

Aufgabe 2

Wir zeigen zuerst die Injektivität. Wir zeigen, dass $t \mapsto \sinh(t)$ injektiv ist, dann muss auch f injektiv sein. Die Funktion sinh ist aber injektiv, weil sie streng monoton steigend ist, das sieht man wie folgt ein. Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ mit $\alpha > \beta$ gegeben, dann gilt

$$\sinh(\alpha) - \sinh(\beta) = \frac{e^\alpha - e^\beta}{2} - \frac{e^{-\alpha} - e^{-\beta}}{2} > 0, \tag{8}$$

weil die Exponentialfunktion streng monoton steigt.
Nun zur Surjektivität, sei $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $x > 0$ und $x^2 - y^2 = 1$ gegeben. Die Abszisse x ist eindeutig durch y mit $x = \sqrt{1+y^2}$ festgelegt. Wenn wir nun ein $t \in \mathbb{R}$ fänden mit $y = \sinh t$,

so würde $x = \sqrt{1+\sinh^2 y}$ gelten. Wir wissen aber bereits aus der Vorlesung, dass $\cosh t$ diese Bedingung erfüllt, also gilt $x = \cosh t$. Das bedeutet, dass es ausreicht zu zeigen, dass es ein $t \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $y = \sinh(t)$ gilt. Da $\ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ immer existiert, denn $|y| < \sqrt{y^2+1}$ gilt, und auch

$$\sinh \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right) = \frac{1}{2}\left(y + \sqrt{1+y^2} - \frac{1}{y+\sqrt{1+y^2}}\right) = \frac{2y^2 + 2y\sqrt{1+y^2}}{y+\sqrt{1+y^2}}\frac{1}{2} = y \tag{9}$$

gilt, ist also $t = \ln\left(y + \sqrt{1+y^2}\right)$ der gesuchte Wert. □

Aufgabe 3

a): Weil $f_1'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} > 0$ für alle x im Definitionsbereich gilt, ist f_1' streng monoton steigend nach Beispiel 4.19 im Skript und damit auf seiner Bildmenge invertierbar. Sei $y \in \mathbb{R}^+$ gegeben, dann gilt

$$\cosh \ln\left(y + \sqrt{y^2-1}\right) = \frac{y + \sqrt{y^2-1} + \frac{1}{y+\sqrt{y^2-1}}}{2} = \frac{2y^2 + 2y\sqrt{y^2-1}}{2(y+\sqrt{y^2-1})} = y. \tag{10}$$

Das war zu zeigen. Nun zu den Ableitungen, wir berechnen zuerst für $y \in]1,\infty[$ direkt

$$\operatorname{arccosh}'(y) = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2-1}}}{y + \sqrt{y^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}} \tag{11}$$

und anschließend mit der Formel zur Ableitung von Umkehrfunktionen

$$\begin{aligned}\operatorname{arcosh}'(y) &= \frac{1}{\cosh'(\operatorname{arcosh}(y))} = \frac{1}{\sinh(\operatorname{arcosh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{arcosh}(y))^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2-1}}\end{aligned} \tag{12}$$

Die beiden Ergebnisse stimmen überein.

b): siehe Lösung von Aufgabe 11.2 für den Beweis der Existenz und Form der Umkehrfunktion von sinh. Zu den Ableitungen, für $y \in \mathbb{R}$ ergibt die direkte Rechnung

$$\operatorname{arcsinh}'(y) = \frac{1 + \frac{y}{\sqrt{y^2+1}}}{y + \sqrt{y^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}} \tag{13}$$

und die Rechnung über die Formel der Ableitung einer Umkehrfunktion ergibt

$$\begin{aligned}\operatorname{arcsinh}'(y) &= \frac{1}{\sinh'(\operatorname{arcsinh}(y))} = \frac{1}{\cosh(\operatorname{arcsinh}(y))} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\cosh(\operatorname{arcosh}(y))^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{y^2+1}}.\end{aligned} \tag{14}$$

Die Ergebnisse stimmen also wieder überein.

c): Wir berechnen wieder die Ableitung um strenge Monotonie zu zeigen. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\tanh'(x) = \frac{\cosh^2 x - \sinh^2 x}{\cosh^2 x} = 1 - \tanh^2(x) > 0, \tag{15}$$

weil, wie in der Aufgabenstellung angegeben, $\tanh < 1$ ist. Damit ist auch tanh injektiv. Sei $y \in]0,1[$, dann gilt

$$\tanh\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+y}{1-y}\right)\right) = \frac{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} - \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}}{\sqrt{\frac{1+y}{1-y}} + \sqrt{\frac{1-y}{1+y}}} = \frac{\sqrt{(1+y)^2} - \sqrt{(1-y)^2}}{\sqrt{(1+y)^2} + \sqrt{(1-y)^2}} = y. \tag{16}$$

Nun zu den Ableitungen, sei $y \in]-1,1[$ dann ergibt sich durch direkte Rechnung

$$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{2}\frac{1-y}{1+y}\frac{1-y+1+y}{(1-y)^2} = \frac{1}{1-y^2} \tag{17}$$

durch Verwendung der Formel für die Ableitung einer Umkehrfunktion ergibt sich

$$\operatorname{arctanh}'(y) = \frac{1}{\tanh'(\operatorname{arctanh}(y))} = \frac{1}{1-\tanh^2(\operatorname{arctanh}(y))} = \frac{1}{1-y^2}. \tag{18}$$

Die beiden Ergebnisse stimmen also wieder überein.

d): Wir berechnen wieder die Ableitung um strenge Monotonie zu zeigen. Es gilt für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\coth'(x) = \frac{\sinh^2 x - \cosh^2 x}{\sinh^2 x} = 1 - \coth^2(x) = \frac{-1}{\sinh^2 x} < 0, \tag{19}$$

weil $\coth' < 0$ ist, ist diese Funktion nach Beispiel 4.19 im Skript streng monoton fallend und damit injektiv. Sei $y \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ gegeben, dann gilt

$$\coth\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{y-1}\right)\right) = \frac{\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} + \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}}{\sqrt{\frac{y+1}{y-1}} - \sqrt{\frac{y-1}{y+1}}} = \frac{\sqrt{(y+1)^2} + \sqrt{(y-1)^2}}{\sqrt{(y+1)^2} - \sqrt{(y-1)^2}} = y. \tag{20}$$

Für ein gegebenes $y \in \mathbb{R}\backslash[-1,1]$ ergibt die direkte Berechnung der Ableitung

$$\operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{2}\frac{y-1}{y+1}\frac{y-1-y-1}{(y-1)^2} = \frac{1}{1-y^2} \tag{21}$$

und die Berechnung über die Formel der Ableitung einer Umkehrfunktion ergibt

$$\operatorname{arcoth}'(y) = \frac{1}{\coth'(\operatorname{arcoth}(y))} = \frac{1}{1-\coth^2(\operatorname{arcoth}(y))} = \frac{1}{1-y^2}. \tag{22}$$

Die beiden Ergebnisse stimmen wieder überein. □

Aufgabe 4

a): Die Funktion g ist nach der Angabe wohl-definiert. Wir zeigen Folgenstetigkeit, sei also $(x_l)_{l\in\mathbb{N}} \in U^{\mathbb{N}}$ mit $\lim_{l\to\infty} x_l = x_0$ gegeben. Weil alle Funktionen f_n stetig in x_0 sind und die Majorante $(\sup_{x\in U} |f_n(x)|)_{n\in\mathbb{N}}$ summierbar ist, können wir den Satz der dominierten Konvergenz anwenden. Damit ergibt sich

$$g(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{l\to\infty} f_n(x_l) = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_l) = \lim_{l\to\infty} g(x_l) \tag{23}$$

□

b): Alle in der Aufgabenstellung vorkommenden Reihen konvergieren absolut (vgl. ζ-Funktion). Wir können daher Reihen nach belieben umordnen. Wir setzen daher den Differenzenquotienten an und zeigen, dass dieser konvergiert. Seien also $x \in \mathbb{R}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $h > 0$ so klein, dass für alle $a \in [x, x+h]$, $|\cos(na) - \cos(nx)| < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\zeta(2)}$ und $|\sin(na) - \sin(nx)| < \frac{\varepsilon}{3}\frac{1}{\zeta(2)}$ beide gelten. Diese Wahl ist aufgrund der Stetigkeit von Sinus und Kosinus immer möglich. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz $\xi_1, \xi_2 \in [x, x+h]$ sodass

$$\begin{aligned}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in(x+h)}}{n^3} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n^3}}{h} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{in(x+h)} - e^{inx}}{hn^3} \\ = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n(x+h)) - \cos(nx)}{hn^3} &+ i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(n(x+h)) - \sin(nx)}{hn^3} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{\sin(n\xi_1)}{n^2} + i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\xi_2)}{n^2}\end{aligned} \tag{24}$$

gilt. Damit gilt also für den Abstand vom Differenzenquotienten zur in der Aufgabenstellung gegebenen Ableitung

$$\begin{aligned}\left|f'(x)-\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right| &= \left|i\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{inx}}{n^2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n\xi_1)}{n^2}-i\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos(n\xi_2)}{n^2}\right| \leq \\ &\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(nx)-\cos(n\xi_2)}{n^2}\right|+\left|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)-\sin(n\xi_1)}{n^2}\right| \leq \\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\cos(nx)-\cos(n\xi_2)|}{n^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin(nx)-\sin(n\xi_1)|}{n^2} &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{3n^2\zeta(2)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{3n^2\zeta(2)} < \varepsilon.\end{aligned} \tag{25}$$

Es gilt also $f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$. □

Aufgabe 5

a): Sowohl die Exponentialfunktion als auch die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{x}$ sind beliebig oft differenzierbar, damit ist die betrachtete Funktion nach der Kettenregel auch differenzierbar. Für die Ableitung von f gilt, dass sie aus Verkettungen und Produkten der Exponentialfunktion, g und Ableitungen dieser Funktion zusammengesetzt ist, also wiederum differenzierbar ist. Für jede höhere Ableitung gilt die gleiche Argumentation (leichter Induktionsbeweis). Nun zur konkreten Form der Ableitung. Diese Zeigen wir über Induktion, der Induktionsbeginn bei $n = 0$ ist direkt ablesbar. Induktionsschritt: Es gelte also für die ersten n Ableitungen

$$f^{(n)}(x) = p_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}, \tag{26}$$

mit der in der Aufgabenstellung angegebenen rekursiven Definition von p_n. Dann gilt für die nächste Ableitung

$$\begin{aligned}f^{(n+1)}(x) &= p_n\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}-\frac{1}{x^2}p_n'\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^2}\left(p_n\left(\frac{1}{x}\right)-p_n'\left(\frac{1}{x}\right)\right)e^{-\frac{1}{x}} = p_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}},\end{aligned} \tag{27}$$

was den Induktionsbeweis abschließt.

b): Einsetzen in die Formel ergibt

$$p_1(z) = z^2 \tag{28}$$

$$p_2(z) = z^4 - 2z^3 \tag{29}$$

$$p_3(z) = z^6 - 6z^5 + 6z^4 \tag{30}$$

und damit auch

$$f'(x) = \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}} \tag{31}$$

$$f^{(2)}(x) = \left(\frac{1}{x^4}-2\frac{1}{x^3}\right)e^{-\frac{1}{x}} \tag{32}$$

$$f^{(3)}(x) = \left(\frac{1}{x^6}-6\frac{1}{x^5}+6\frac{1}{x^4}\right)e^{-\frac{1}{x}}. \tag{33}$$

c): Sei $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Aus der Rekursionsvorschrift ist leicht abzulesen, dass der Grad von p_n kleiner oder gleich $2n$ ist. Dann gilt

$$0 = \lim_{z\to\infty}\frac{|p_n(z)|}{z^{2n+1}}(2n+2)! \geq \lim_{z\to\infty}\frac{z|p_n(z)|}{e^z} = \lim_{z\to\infty}e^{-z}z|p_n(z)| \overset{z=\frac{1}{x}}{=} \lim_{x\to 0}e^{-\frac{1}{x}}\frac{\left|p_n\left(\frac{1}{x}\right)\right|}{x}. \tag{34}$$

□

d): Die Behauptung folgt unmittelbar aus den vorherigen Teilaufgaben. Links von der Null ist g konstant Null und daher existieren beliebig viele Ableitungen und sind auch konstant Null. Rechts der Null ist g nach a) beliebig oft differenzierbar und der Grenzwert $\lim_{x \to 0} g^{(n)}(x)$ existiert für alle $n \in \mathbb{N}$ und ist gleich Null. Damit können alle Ableitungen stetig in der Null fortgesetzt werden.

Aufgabe 6

a): Seien x_1 und $x_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Lösungen der Schwingungslgeichung mit Reibung und Zahlen $\alpha\beta \in \mathbb{C}$ gegeben. Dann gilt

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(\alpha x_1 + \beta x_2) = m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_1 + m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}x_2 = -k\alpha x_1 - \mu\alpha\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_1 - k\beta x_2 - \mu\beta\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}x_2 = -k(\alpha x_1 + \beta x_2) - \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\alpha x_1 + \beta x_2). \tag{35}$$

Also bildet die Menge aller Lösungen ein Vektorraum über $\mathbb{C}$.

b): Wir wählen den in der Aufgabenstellung beschriebenen Ansatz. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ gegeben und $x(t) = e^{\lambda t}$, dann gilt für alle $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}e^{\lambda t} &= -ke^{\lambda t} - \mu\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{\lambda t} \iff \\ m\lambda^2 = -k - \mu\lambda \iff \lambda_{1,2} &= \frac{-\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m} \end{aligned} \tag{36}$$

Man findet dann zwei reelle Lösungen wenn $\mu^2 > 4mk$ gilt, für $\mu^2 = 4mk$ findet man nur eine reelle Lösung und sonst zwei komplexe Lösungen.

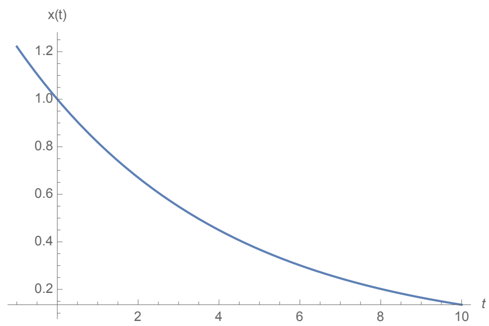
c): Falls es zwei reelle Lösungen für λ gibt sind die zugehörigen Ansätze $t \mapsto e^{\lambda t}$ ebenfalls reell. Nehme also an $\mu^2 < 4mk$, dann sind

$$x_1(t) := e^{\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}t} + e^{\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}t} = e^{\frac{-\mu t}{2m}} 2\cos\left(\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}t\right) \tag{37}$$

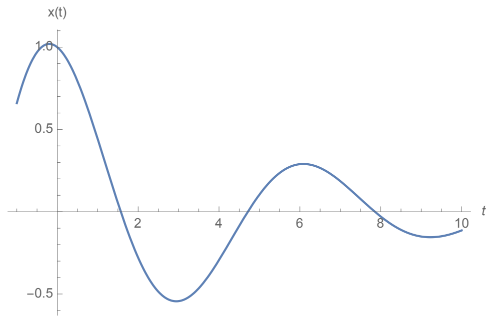
$$x_2(t) := i\left(e^{\frac{-\mu + \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}t} - e^{\frac{-\mu - \sqrt{\mu^2 - 4mk}}{2m}t}\right) = -e^{\frac{-\mu t}{2m}} 2\sin\left(\frac{\sqrt{4mk - \mu^2}}{2m}t\right) \tag{38}$$

zwei linear unabhängige reelle Lösungen.

d): Fall 1 gehört zur starken Dämpfung, hier die zugehörige Skizze.



Fall 2 gehört zur schwachen Dämpfung, hier die zugehörige Skizze.



Der Unterschied besteht vor allem darin, dass im 1. Fall keine Schwingungen statt finden.