Lösung zur Übung für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Sei $\varepsilon > 0$. Wir wählen zuerst δ_1 so, dass für alle $y \in \mathbb{R}$ mit $|y - y_0| < \delta_1$ die Ungleichung $|g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$ gilt. Dies ist mit der Stetigkeit von g in y_0 möglich. Nun wählen wir des Weiteren δ_2 so, dass für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta_2$ die Ungleichung $|f(x) - f(x_0)| < \delta_1$ gilt. Dies wiederum ist mit der Stetigkeit von f in x_0 möglich.
Wir behaupten nun, dass $\delta := \delta_2$ für die Stetigkeit von h in x_0 ausreicht. Sei also $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - x_0| < \delta$. Dann gilt mit $y = f(x)$, dass

$$|h(x) - h(x_0)| = |g(f(x)) - g(f(x_0))| = |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon,$$

denn: Mit der Wahl von δ gilt gerade $|y - y_0| < \delta_1$, womit die gewünschte Ungleichung folgt.

Aufgabe 2

Das zu Zeigende ist äquivalent zur Aussage

$$f(x) := \frac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{x} \xrightarrow{x \to 0} 0.$$

Sei dafür $\varepsilon > 0$. Wir beobachten zuerst, dass

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{x}\left(\frac{(\sqrt{1+x}-1)(\sqrt{1+x}+1)}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{x}{2}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{x}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Die nächste Beobachtung ist, dass die Wurzelfunktion $\sqrt{x}$ stetig auf $\mathbb{R}_{>0}$ ist, was Satz 3.46 zusammen mit der Stetigkeit der Umkehrfunktion x^2 ergibt. Mit Satz 3.32 ist auch f stetig, insbesondere können wir f im Punkt 0 via $f(0) := 0$ stetig fortsetzen. Wir können also $\delta > 0$ finden, sodass für alle $x \in U_\delta(0)$, also für alle $|x| < \delta$, die Ungleichung

$$|f(x) - f(0)| = |f(x)| < \varepsilon$$

gilt. Doch dies ist genau, was zu zeigen war.

Aufgabe 3

(a) Die Aussage ist definiert als

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \frac{a}{x^2} - b - cx^2}{x^2} = 0.$$

(b) Wir sehen zuerst mit dem Hinweis, dass

$$\cos x = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^k}{k!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-ix)^k}{k!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}.$$

Diese Darstellung nutzen wir, um ähnlich wie in T10.2(e) vorzugehen. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1-\cos x} &= \frac{1}{1-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}} = \frac{1}{\frac{x^2}{2}-\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}} \\
&= \frac{2}{x^2}\cdot\frac{1}{1-2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-2}}{(2k)!}} = \frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2\sum_{k=2}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{2k-2}}{(2k)!}\right)^n \\
&= \frac{2}{x^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2x^2}{4!}-\frac{2x^4}{6!}+o(x^4)\right)^n = \frac{2}{x^2}\left(\underbrace{1}_{n=0}+\underbrace{\frac{2x^2}{4!}-\frac{2x^4}{6!}+o(x^4)}_{n=1}+\underbrace{\frac{4x^4}{4!^2}+o(x^4)}_{n=2}+\underbrace{o(x^4)}_{n>2}\right) \\
&= \frac{2}{x^2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{120}x^2+o(x^2).
\end{aligned}$$

Die geometrische Reihe lässt sich hier nutzen, da der Ausdruck für $x\to 0$ gegen Null geht.

Aufgabe 4

Wir wissen bereits mit Satz 3.40, dass die Exponentialfunktion in jedem Punkt $x\in\mathbb{R}$ stetig ist, es verbleibt also nur, die Stetigkeit in $\pm\infty$ zu zeigen. Per Definition der Konvergenz genügt es zu zeigen, dass $\lim_{x\to\pm\infty}\operatorname{Exp}(x)=\operatorname{Exp}(\pm\infty)$. Für $x\in\mathbb{R}^+$ gilt

$$\operatorname{Exp}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{k!}\geq x\xrightarrow{x\to\infty}\infty,$$

also auch $\exp(x)\xrightarrow{x\to\infty}\infty$. Damit ist die Stetigkeit in $+\infty$ gezeigt. Zudem gilt

$$\lim_{x\to-\infty}\exp x=\lim_{x\to\infty}\exp(-x)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\exp(x)}=0=\operatorname{Exp}(-\infty).$$

Aufgabe 5

(a) '$\Rightarrow$' Sei $V\subseteq U$ offen in U. Wir zeigen, dass V dann auch offen in M ist. Nach Annahme gibt es eine offene Menge $W\subseteq\mathbb{C}$, sodass $W\cap U=V$. Damit gilt

$$W\cap M=W\cap(U\cap M)=(W\cap U)\cap M=V\cap M,$$

es ist also V offen in $V\cap M$. Der Beweis für $V\cap N$ erfolgt analog.

'$\Leftarrow$' Sei $V\subseteq U$ so, dass offene Mengen $W',W''\subseteq\mathbb{C}$ existieren mit $W'\cap M=V\cap M$ und $W''\cap N=V\cap N$. Des Weiterhin existieren abgeschlossene Mengen M',N', sodass $U\cap A'=A$ für $A\in\{M,N\}$. Definiere

$$W:=(W'\setminus N')\cup(W''\setminus M')\cup(W'\cap W'').$$

Da N' (bzw. M') abgeschossen ist, ist $W'\setminus N'$ (bzw. $W''\setminus M'$) offen und damit W als Vereinigung dreier offener Mengen offen. Zudem gilt

$$\begin{aligned}
U\cap W &= (M\cup N)\cap W=(M\cap W)\cup(N\cap W)\\
&= (M\cap(W'\setminus N'))\cup(M\cap(W'\cap W''))\\
&\quad\cup(N\cap(W''\setminus M'))\cup(N\cap(W'\cap W''))\\
&\overset{(*)}{=} ((M\cap V)\setminus N)\cup((M\cap V)\cap W''))\cup((N\cap V)\setminus M')\cup((N\cap V)\cap W')\\
&\overset{(**)}{=} ((M\cap V)\setminus N)\cup((M\cap V)\cap(W''\cap N))\cup((N\cap V)\setminus M')\cup((N\cap V)\cap(W'\cap M))\\
&= ((M\cap V)\setminus N)\cup((M\cap V)\cap N)\cup((N\cap V)\setminus M')\cup((N\cap V)\cap M)\\
&= (V\cap M)\cup(V\cap N)=V\cap(M\cup N)\\
&= V\cap U,
\end{aligned}$$

womit V offen in U ist. Hierbei wurde in (*) verwendet, dass N und N' (bzw. M und M') auf U übereinstimmen. Für (**) hingegen sehen wir, dass wir W'' mit N schneiden können, da die nicht in N enthaltene Menge auch in $(M \cap V) \setminus N$ enthalten ist (analog können wir W' mit M schneiden).

(b) Sei $W \subseteq \mathbb{C}$ offen und sei $f|_A$ die Einschränkung von f auf $A \subseteq U$. Nach Annahme sind $f|_M^{-1}[W]$ sowie $f|_N^{-1}[W]$ offene Mengen und damit insbesondere offen in U. Des Weiteren ist $f|_A^{-1}[W] = f^{-1}[W] \cap A$ für $A \in \{M, N\}$.

Nach Teilaufgabe (a) ist damit jedoch auch $f^{-1}[W]$ offen in U, womit die Stetigkeit von f gezeigt ist.

(c) Wir zeigen, dass f folgenstetig ist. Sei dafür $x \in U$ und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in U mit $a_n \xrightarrow{n\to\infty} x$.

Aufgrund der Überdeckungseigenschaft gibt es einen Index $j \in I$, sodass $x \in M_j$. Da M_j offen ist, ist x ein innerer Punkt und es existiert $\varepsilon > 0$, sodass $U_\varepsilon(x) \subseteq M_j$. Aufgrund der Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gibt es außerdem $N \in \mathbb{N}$, sodass $a_n \in U_\varepsilon(x) \subseteq M_j$ für alle $n \geq N$.

Da f stetig und insbesondere folgenstetig auf M_j ist, konvergiert die Folge $(f(a_n))_{n\geq N}$ gegen $f(x)$, womit aber auch $(f(a_n))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(x)$ konvergiert. Die Funktion f ist also folgenstetig in x und damit stetig in x.

Die Folgerung über Aussage (b) ergibt sich, da die offenen Mengen N, M eine Überdeckung von U bilden und (c) angewendet werden kann.

(d) Es ist

$$f \wedge g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } x \in M, \\ g(x) & \text{falls } x \in N. \end{cases}$$

Es ist also $f \wedge g$ auf den Einschränkungen N und M stetig, es gilt $N \cup M = U$ und M als auch N sind als Urbilder (in $\mathbb{R}$) abgeschlossener Mengen unter der stetigen Funktion $f - g$ abgeschlossen in U. Wir können also (b) anwenden und zeigen, dass $f \wedge g$ stetig ist.

Aufgabe 6

Lemma 1. *Für alle $M \geq 0$ gibt es ein $c > 0$ und ein $L > 0$, so dass für alle $z \in \Delta_{M.c}$ gilt:*

$$|z - 1| \leq L(1 - |z|). \tag{1}$$

Insbesondere folgt für solche $c > 0$:

$$\Delta_{M,c} \subseteq \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1 \ \vee\ z = 1\}. \tag{2}$$

Satz 1 (Abelscher Grenzwertsatz)**.** *Gegeben sei eine konvergente Reihe*

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \in \mathbb{C}$$

zu einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Werten in $\mathbb{C}$. Weiter sei $M \geq 0$ gegeben. Dann existiert $c > 0$ mit

$$\Delta_{M,c} \subseteq \{z \in \mathbb{C} |\ |z| < 1 \ \vee\ z = 1\}, \tag{3}$$

so dass die auf $\Delta_{M,c}$ eingeschränkte Potenzreihe

$$f : \Delta_{M,c} \to \mathbb{C}, \quad f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

stetig ist.

Beweis:[1] Wir wählen $c > 0$ und $L > 0$ nach dem vorhergehenden Lemma[2]; insbesondere gilt dann die Behauptung (3)[3]. Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ besitzt mindestens den Konvergenzradius 1, weil sie für $z = 1$ nach Voraussetzung konvergiert. Insbesondere ist sie in allen Punkten $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ stetig[4]. Wegen Formel (3) ist f in allen Punkten $z \in \Delta_{M,c} \setminus \{1\}$ stetig, da Potenzreihen im *Inneren* ihrer Konvergenzkreisscheibe stetig sind. Es bleibt nur noch der interessanteste Fall $z = 1$ zu behandeln. Zu zeigen ist also:

$$\forall \epsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall z \in \Delta_{M,c} : \left(|z-1| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \epsilon \right) \tag{4}$$

Hierzu sei $\epsilon > 0$ gegeben[5]. Weil die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ in $\mathbb{C}$ konvergiert, bildet die Folge der Partialsummen

$$b_m := \sum_{n=0}^{m} a_n, \quad m \in \mathbb{N}_0, \tag{5}$$

eine Cauchyfolge. Wir finden also ein $n_0 \in \mathbb{N}_0$, so dass für alle $l, m \in \mathbb{N}_0$ mit $n_0 \le l \le m$ gilt:

$$|b_m - b_l| < \frac{\epsilon}{2L} \tag{6}$$

Wegen der Stetigkeit von Polynomfunktionen gilt

$$\sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n \xrightarrow{z \to 1} \sum_{n=0}^{n_0} a_n.$$

Wir nehmen also ein $\delta > 0$[6], so dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-1| < \delta$ gilt:

$$\left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n \right| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{7}$$

Mit dieser Wahl von δ ist vom ursprünglichen Beweisziel (4) nur mehr das folgende Beweisziel übrig geblieben:

$$\forall z \in \Delta_{M,c} : \left(|z-1| < \delta \;\Rightarrow\; \left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \epsilon \right) \tag{8}$$

Zum Beweis hiervon sei $z \in \Delta_{M,c}$ mit $|z-1| < \delta$ gegeben[7]. Wir schätzen ab:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| &= \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n + \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \\
&\le \left| \sum_{n=0}^{n_0} a_n z^n - \sum_{n=0}^{n_0} a_n \right| + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n z^n - \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n \right| = \frac{\epsilon}{2} + \left| \sum_{n=n_0+1}^{\infty} a_n (z^n - 1) \right| \\
&= \frac{\epsilon}{2} + \lim_{m \to \infty} \left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z^n - 1) \right|
\end{aligned}$$

---

[1] Zu zeigen ist die Existenz von $c > 0$, sodass (3) gilt und f auf $\Delta_{M,c}$ stetig ist.

[2] Nach der Wahl von $c > 0$ sind nur noch die beiden Eigenschaften zu zeigen.

[3] Es ist nur noch die Stetigkeit von f auf $\Delta_{M,c}$ zu zeigen.

[4] Wie im Folgenden auch ausformuliert, ist damit gezeigt, dass f in allen Punkten $1 \neq z \in \Delta_{M,c}$ stetig ist. Es verbleibt also nur noch die Stetigkeit von f im Punkt 1 zu zeigen.

[5] Für den Beweis der Stetigkeit ist jetzt also ein $\delta > 0$ zu finden, sodass die Implikation in (4) für alle $z \in \Delta_{M,c}$ gilt.

[6] Mit der Wahl von δ wie in (7) verbleibt zu zeigen, dass die Implikation in (4) für alle $z \in \Delta_{M,c}$ gilt, was in (8) ausformuliert ist.

[7] Es verbleibt zu zeigen, dass z die Ungleichung $\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A\right| < \epsilon$ erfüllt.

wobei wir die Stetigkeit des Absolutbetrags verwendet haben. Es genügt nun, noch zu zeigen:

$$\forall m > n_0 : \left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z^n - 1) \right| \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{9}$$

denn damit folgt die zu zeigende Behauptung so[8]:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n - A \right| < \frac{\epsilon}{2} + \lim_{m\to\infty} \left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z^n - 1) \right| \leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Zum Beweis der Behauptung (9) sei $m \in \mathbb{N}_0$ mit $m > n_0$ gegeben[9]. Die Hauptidee des Beweises besteht nun darin, die Differenz $z^n - 1$ in der folgenden Rechnung mit der geometrischen Summe auszudrücken und dann die Summationsreihenfolge zu vertauschen:

$$\begin{aligned}
&\sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z^n - 1) = \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k \\
=&(z-1) \sum_{\substack{(n,k)\in\mathbb{N}_0^2: \\ n_0 < n \leq m, \\ k < n}} a_n z^k = (z-1) \sum_{k=0}^{m-1} z^k \sum_{n=\max\{n_0,k\}+1}^{m} a_n \\
=&(z-1) \sum_{k=0}^{m-1} z^k (b_m - b_{\max\{n_0,k\}}) \quad \text{(siehe (5))}
\end{aligned}$$

Schätzen wir den Betrag davon mit Dreiecksungleichung ab und verwenden nochmal die geometrische Summe, diesmal für die Absolutbeträge:

$$\begin{aligned}
&\left| \sum_{n=n_0+1}^{m} a_n (z^n - 1) \right| = |z-1| \left| \sum_{k=0}^{m-1} z^k (b_m - b_{\max\{n_0,k\}}) \right| \\
\leq&|z-1| \sum_{k=0}^{m-1} |z|^k |b_m - b_{\max\{n_0,k\}}| \leq |z-1| \sum_{k=0}^{m-1} |z|^k \frac{\epsilon}{2L} \quad \text{(wegen (6))} \\
=&|z-1| \frac{1-|z|^m}{1-|z|} \frac{\epsilon}{2L} \leq \frac{|z-1|}{1-|z|} \frac{\epsilon}{2L} \quad \text{(wegen } |z|^m \leq 1\text{)} \\
\leq&L \frac{\epsilon}{2L} = \frac{\epsilon}{2} \quad \text{(wegen (1) in Lemma 1)}
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung (9) gezeigt[10]. □

[8] Die folgende Zeile zeigt, wie aus (9) der Satz folgt. Damit ist (9) das verbleibende Restziel.
[9] Zu zeigen ist noch, dass m die Ungleichung in (9) erfüllt.
[10] Da (9) den Satz impliziert, ist nichts mehr zu zeigen.