Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Sei $(a_m)_{m\in\mathbb{N}_0} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}_0}$ gegeben. Nehme an es gelte

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall n > m : |a_n| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Sei $\varepsilon > 0$, wähle $p \in \mathbb{N}_0$ nach Gleichung (1) so groß, dass

$$\forall n > p : a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} \tag{2}$$

gilt. Dann gilt insbesondere auch

$$\forall n \geq p + 1 \in \mathbb{N} : a_n \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \tag{3}$$

Insgesamt gilt dann also

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}_0\ \forall n > m : |a_n| \leq \varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists m \in \mathbb{N}\ \forall n \geq m : |a_n| < \varepsilon. \tag{4}$$

□

Aufgabe 2

Weil $f(0) = 0$ gilt, ist zu zeigen:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall y \in \mathbb{R} : |y| < \delta \Rightarrow |f(y)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Seien $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $\delta = \varepsilon^2$. Sei $y \in U_{\varepsilon^2}(0)$ gegeben. Es gilt

$$|f(y)| = \sqrt{|y|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon. \tag{6}$$

Für die erste Gleichheit wurde verwendet, dass $\forall a \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{a} > 0$ gilt. Dies wurde in Aufgabe T3.5 gezeigt. □

Aufgabe 3

Sei $s > 1$ gegeben. Wir halten uns an den Tipp der Aufgabe und zeigen zuerst Induktiv

$$\forall k \in \mathbb{N}_0 : \sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{l^s} \leq 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{(2^{s-1})^n}. \tag{7}$$

Nachdem die rechte Seite der Ungleichung (7) konvergiert, ist dann über das Majorantenkriterium die Konvergenz einer Teilfolge des Ausdrucks

$$\left(\sum_{k=1}^{M} \frac{1}{k^s} \right)_{M\in\mathbb{N}} \tag{8}$$

gezeigt. Nachdem dieser Ausdruck aber monoton in M steigt, konvergiert er auch und gegen den gleichen Grenzwert wie seine Teilfolge.
Beweis von (7): Für $k = 0$ stimmt die zu zeigende Formel offenbar. Nehme also an, sie gilt für k und zeige sie für $k + 1$:

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2^{k+1}} \frac{1}{l^s} = \sum_{l=1}^{2^k} \frac{1}{l^s} + \sum_{l=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{l^s} &\overset{\text{Induktionsvoraussetzung}}{\leq} 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^n} + \sum_{l=2^k+1}^{2^{k+1}} \frac{1}{(2^k)^s} \\
&= 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^n} + \frac{2^k}{(2^k)^s} = 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^n} + \frac{1}{(2^k)^{s-1}} \\
&= 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k} \frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^n} + \frac{2^{s-1}}{(2^{s-1})^{k+1}} = 2^{s-1} \sum_{n=0}^{k+1} \frac{1}{\left(2^{s-1}\right)^n}
\end{aligned} \tag{9}
$$

□

Aufgabe 4

Wir schätzen den Fehler ab, den wir mit Abbrechen der Summe machen. Sei $m \in \mathbb{N}$, definiere

$$
f(m) := \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{l!}. \tag{10}
$$

Um Konvergenz müssen wir uns keine Sorgen machen, denn die Exponentialfunktion ist nach der Vorlesung wohldefiniert. Der Fehler lässt sich mit

$$
\begin{aligned}
f(m) &= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \prod_{b=1}^{l} \frac{1}{m+1+b} \leq \frac{1}{(m+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \prod_{b=1}^{l} \frac{1}{m+2} \\
&= \frac{1}{(m+1)!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(m+2)^l} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{1}{1 - \frac{1}{m+2}} = \frac{1}{(m+1)!} \frac{m+2}{m+1}
\end{aligned} \tag{11}
$$

abschätzen. Weil

$$
f(9) = \frac{11}{36288000} < 10^{-6} \tag{12}
$$

gilt, reicht es, die ersten neun Glieder der Reihe aufzuaddieren. Es ergibt sich also als genäherter Wert für e

$$
e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \frac{1}{362880} \approx 2.7182815. \tag{13}
$$