Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

Wir definieren die Folgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ als $b_k := \sum_{n=0}^{2k}(-1)^n a_n$ und $c_k := \sum_{n=0}^{2k+1}(-1)^n a_n$. Zunächst beobachten wir, dass b_k monoton fallend ist, denn

$$b_{k+1} = b_k + a_{2k+2} - a_{2k+1} \leq b_k,$$

was aus der Monotonie von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und daher aus $a_{2k+2} \leq a_{2k+1}$ folgt. Analog zeigt man, dass $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ monoton steigt. Des Weiteren sehen wir, dass

$$a_0 = b_0 \geq b_k \geq b_k - a_{2k+1} = c_k \geq c_0 = a_0 - a_1 \quad \forall\, k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit sind also die Folgen $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ beide monoton und beschränkt. Nach Aufgabe T7.2 konvergieren dann beide Folgen in $\mathbb{R}$ und der jeweilige Grenzwert $b := \lim_{k\to\infty} b_k$ und $c := \lim_{k\to\infty} c_k$ existiert. Zudem gilt

$$|b_k - c_k| = |a_{2k+1}| \xrightarrow{k\to\infty} 0,$$

weswegen $b = c$. Doch damit konvergiert auch die Folge $(d_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gegen b, definiert als $d_{2k} = b_k$ und $d_{2k+1} = c_k$ für $k \in \mathbb{N}_0$ – also $d_k = \sum_{n=0}^{k}(-1)^n a_n$, was die zu zeigende Konvergenz ergibt. Die behaupteten Ungleichungen gelten mit der Monotonie von $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und mit T7.2.

Aufgabe 2

Für $|x| < 1$ können wir die geometrische Reihe benutzen, was uns zu

$$\frac{1}{1-(-x^2)} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}$$

führt. Dies lässt sich weiter in Potenzreihenform bringen als

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{1}_{\{2 \text{ teilt } k\}}(-1)^{\mathbb{1}_{\{4 \text{ teilt } k \text{ nicht}\}}} \cdot x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2}((-i)^k + i^k)\cdot x^k,$$

wobei die erste Darstellung Gebrauch der Indikatorfunktion $\mathbb{1}_{\{\cdot\}}$ macht. Falls k gerade ist, gilt insbesondere $|((-i)^k + i^k)x^k| = 2|x|^k$, was für $|x| > 1$ als Folge in k unbeschränkt ist. Der Konvergenzradius dieser Reihe ist also 1.

Aufgabe 3

(a) Definiere $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Wir nutzen das Quotientenkriterium und untersuchen $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{a_{n+1}}{a_n}$:

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{(n+1)!^2}{n!^2}\cdot\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{2(2n+1)} \\ &\leq \frac{1}{2} < 1.\end{aligned}$$

Da dies für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt, konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.

(b) Definiere $b_n := \binom{2n}{n}9^{-n} = \frac{(2n)!}{9^n(n!)^2} = (9^n a_n)^{-1} \geq 0$ für $n \in \mathbb{N}_0$ und wende erneut das Quotientenkiterium an:

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{9(n+1)^2} = \frac{2(2n+1)}{9(n+1)} \leq \frac{1}{2} < 1,$$

womit auch diese Reihe nach dem Quotientenkriterium konvergiert.

(c) Der Ausdruck lässt sich zerlegen als Summe zweier geometrischer Reihen mit Argument $\frac{1}{2}$ bzw. $-\frac{1}{2}$, die also beide konvergieren. Damit lässt sich Satz 3.4 anwenden und wir erhalten

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1+2(-1)^n}{2^{n-1}} &= 2\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{-n} + 4\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n} = \frac{2}{1-\frac{1}{2}} + \frac{4}{1+\frac{1}{2}} \\ &= 4 + \frac{8}{3} = \frac{20}{3}.\end{aligned}$$

Aufgabe 4

Wir zeigen zuerst den Hinweis. Sei $\lambda > 0, k \in \mathbb{N}_0$ und $n \in \mathbb{N}$. Es gilt

$$\exp(\lambda n) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\lambda n)^j}{j!} \geq \frac{(\lambda n)^{k+1}}{(k+1)!},$$

woraus der Hinweis folgt. Hiermit erhalten wir

$$\frac{n^k}{\exp(\lambda n)} \leq \frac{1}{n}\lambda^{-k-1}(k+1)! \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

da $\frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0$.