Lösung zum Tutorium für Analysis einer Variablen
WS 2016/17

Aufgabe 1

a): Weil sich der große Zeiger zwölfmal so schnell dreht wie der kleine Zeiger, legt der große Zeiger zwischen t_n und t_{n+1} die Strecke, welche der kleine Zeiger zum Zeitpunkt t_n voraus war, in einem Zwölftel der Zeit zurück, die der kleine Zeiger für die gleiche Strecke brauchte. Damit kann der kleine Zeiger nur noch ein Zwölftel des letzten Vorsprunges aufbauen. Dies wiederholt sich für alle $n \in \mathbb{N}$. Aus dieser heuristischen Überlegung ergibt sich die folgende rekursive Formel:

$$t_n = t_{n-1} + \frac{12h}{12^n} \wedge t_0 = 12h. \tag{1}$$

b): Mit einem sehr einfachen Induktionsbeweis findet man mit (1)

$$t_n = t_{n-1} + \frac{12h}{12^n} = t_{n-2} + \frac{12h}{12^{n-1}} + \frac{12h}{12^n} = \cdots = \sum_{k=0}^{n} \frac{12h}{12^k}. \tag{2}$$

c): Weil $\left(\frac{t_n}{12h}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Reihe ist, ergibt sich mit Satz 3.2 aus dem Skript, dass

$$\exists \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{12h} \wedge \lim_{n\to\infty} \frac{t_n}{12h} = \frac{1}{1-\frac{1}{12}} \tag{3}$$

gilt. Nach Satz 3.4 des Skriptes ergibt sich direkt $T = \lim_{n\to\infty} t_n = \frac{12h}{1-\frac{1}{12}} = \frac{144h}{11}$. Dies lässt sich auch als $T = 13h + 5\text{min} + 27,\overline{27}s$ schreiben.

d): Wir modellieren die Zeigerbewegung zwischen 13 Uhr und 14 Uhr. Wir bezeichnen den Vollwinkel mit 2π. Die folgenden zwei Funktionen geben den Winkel an, den der große (G) bzw. kleine (K) Zeiger mit dem Vektor, der auf zwölf Uhr zeigt, einschließt:

$$\begin{aligned} G :& [13h, 14h[\to [0, 2\pi[\\ & x \mapsto (x - 12h)\frac{2\pi}{12h}, \end{aligned} \tag{4}$$

$$\begin{aligned} K :& [13h, 14h[\to [0, 2\pi[\\ & x \mapsto (x - 13h)2\pi/h. \end{aligned} \tag{5}$$

Es ergibt sich dann für das Ergebnis aus der letzten Teilaufgabe

$$G\left(\frac{144}{11}h\right) = \left(\frac{144}{11}h - 12h\right)\frac{2\pi}{12h} = 2\pi\left(\frac{144}{11}h - 13h\right)/h = K\left(\frac{144}{11}h\right). \tag{6}$$

Aufgabe 2

Lemma 1. *Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine monoton steigende Folge, die nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert, dann hat $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ keinen Häufungspunkt.*

Beweis: Sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine Folge, die nicht in $\mathbb{R}$ konvergiert. Nehme für einen Widerspruch an, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ hat einen Häufungspunkt $x \in \mathbb{R}$. Sei $\varepsilon > 0$, weil x ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, gibt es ein $N \in \mathbb{N}_0$ mit

$$|b_N - x| < \varepsilon. \tag{7}$$

Nachdem $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aber nicht gegen x konvergiert, gibt es $M > N$ sodass

$$|b_M - x| \geq \varepsilon. \tag{8}$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist aber monoton steigend, deshalb kann b_M nicht kleiner als x sein (falls es kleiner wäre, müsste es kleiner als b_N sein, denn sein Abstand zu x ist ja größer). Nun kann es aber kein $P > M$ geben mit

$$|b_P - x| < \varepsilon, \tag{9}$$

denn b_M ist ja bereits größer als x und die Folge kann danach nur noch steigen, also den Abstand zu x nur noch vergrößern. Dies steht allerdings im Widerspruch dazu, dass x ein Häufungspunkt von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist, was den Beweis abschließt.
Nun zur Aufgabe.
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subset \mathbb{R}$ eine monoton steigende Folge. Falls die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in $\mathbb{R}$ konvergiert, ist nichts mehr zu zeigen. Nehme also an, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert nicht in $\mathbb{R}$. Falls $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ von oben beschränkt wäre, hätte die Folge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß mindestens einen Häufungspunkt (denn sie ist ja immer durch a_0 von unten beschränkt). Nach Lemma 1 kann $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ aber keinen Häufungspunkt haben, kann also nicht von oben beschränkt sein. Sei $V \subseteq \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ eine offene Umgebung von $+\infty$. Sei außerdem $r > 0$ so , dass

$$\forall x \in \mathbb{R} : x > r \Rightarrow x \in V, \tag{10}$$

gilt. Weil $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht von oben beschränkt ist, muss es ein $N \in \mathbb{N}$ geben, sodass $a_N > r$ ist. Nachdem $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton steigend ist, sind auch alle folgenden Glieder größer als r und daher in V. Also konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen $+\infty$. □

Aufgabe 3

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. Zuerst beobachten wir, dass, falls

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} \tag{11}$$

gälte, der Beweis mit der folgenden kurzen Rechnung erledigt wäre:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(a_k + a_{n-k+1}). \tag{12}$$

Es bleibt also noch (11) zu zeigen. Das machen wir mit Induktion über n. Der Induktionsbeginn bei $n = 0$ ist offensichtlich, denn auf beiden Seiten der Gleichung steht die leere Summe. Nehme also an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} \tag{IV}$$

gilt. Nun zum Induktionsschritt; für die Summe mit einem weiteren Glied gilt

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} a_k &= a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_k \overset{\text{(IV)}}{=} a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k+1} = a_{n+1} + \sum_{k=1}^{n} a_{(n+1)-(k+1)+1} \\ &= a_{(n+1)+1-1} + \sum_{l=2}^{n+1} a_{(n+1)-l+1} = \sum_{l=1}^{n+1} a_{(n+1)-l+1} = \sum_{k=1}^{n+1} a_{(n+1)-k+1}, \end{aligned} \tag{13}$$

was den Beweis abschließt. $\square$

Aufgabe 4

Der Beweis wird über Induktion geführt. Für den Induktionsanfang sei $n = 0$ und $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}, (b_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C}$ jeweils nur im ersten Eintrag von 0 verschieden. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{C}$

$$\left(\sum_{m=0}^{0} a_m x^m\right)\left(\sum_{k=0}^{0} b_k x^k\right) = a_0 b_0 = \sum_{m=0}^{0}\left(\sum_{l=0}^{0} a_l b_{m-l}\right) x^m. \tag{14}$$

Als Induktionsvoraussetzung nehmen wir jetzt also an es gilt für ein $n \in \mathbb{N}$, dass alle komplexwertigen Folgen $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}, (b_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $a_m = b_m = 0$ für $m > n$

$$\left(\sum_{m=0}^{n} a_m x^m\right)\left(\sum_{l=0}^{n} b_l x^l\right) = \sum_{c=0}^{2n}\left(\sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k}\right) x^m \tag{15}$$

erfüllen. Wir wollen diese Aussage nun für $n+1$ zeigen. Seien komplexwertige Folgen $(z_m)_{m\in\mathbb{N}}, (y_m)_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ mit $z_m = y_m = 0$ für $m > n+1$ gegeben. Sei $u, c \in \mathbb{N}$, dann heißt

$$\delta_{u,c} := \begin{cases} 1 & \text{für } u = c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{16}$$

Kronecker-Delta von u und c. Wir definieren außerdem

$$\forall u \in \mathbb{N} : \tilde{z}_u := z_u - \delta_{u,n+1} \cdot z_{n+1} \wedge \tilde{y}_u := y_u - \delta_{u,n+1} \cdot y_{n+1}. \tag{17}$$

Die Folgen $(\tilde{z}_u)_{u\in\mathbb{N}}, (\tilde{y}_u)_{u\in\mathbb{N}}$ erfüllen die Bedingungen der Induktionsannahme. Wir betrachten zunächst einmal die auftretenden Koeffizienten. Sei $m \in \mathbb{N} \wedge n+1 \leq m \leq 2n$, dann gilt

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} \tilde{z}_k \tilde{y}_{m-k} &= \sum_{k=0}^{m} (z_k - \delta_{k,n+1} \cdot z_{n+1})(y_{m-k} - \delta_{m-k,n+1} \cdot y_{n+1}) \\ &\overset{\Delta}{=} \sum_{k=0}^{m} z_k y_{m-k} - z_{n+1} y_{m-(n+1)} - z_{m-(n+1)} y_{n+1} \\ &= c_m - z_{n+1} y_{m-(n+1)} - z_{m-(n+1)} y_{n+1}, \end{aligned} \tag{18}$$

wobei für die mit Δ gekennzeichnete Gleichheit die Eigenschaften (16) des Kronecker-Deltas mehrfach verwendet wurden. In dem Fall $m \leq n$ bleibt in der gleichen Rechnung nur der erste Summand der letzten Gleichheit von (18) übrig. Für die letzte Gleichheit wurde die Definition von c_m für $n+1$ verwendet. Wir finden damit insgesamt

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{m=0}^{n+1} z_m x^m\right)\left(\sum_{l=0}^{n+1} y_l x^l\right) = \left(z_{n+1} x^{n+1} + \sum_{m=0}^{n} z_m x^m\right)\left(y_{n+1} x^{n+1} + \sum_{l=0}^{n} y_l x^l\right) \\ &= \left(z_{n+1} x^{n+1} + \sum_{m=0}^{n} \tilde{z}_m x^m\right)\left(y_{n+1} x^{n+1} + \sum_{l=0}^{n} \tilde{y}_l x^l\right) \\ &= z_{n+1} y_{n+1} x^{2n+2} + z_{n+1} x^{n+1} \sum_{l=0}^{n} \tilde{y}_l x^l + y_{n+1} x^{n+1} \sum_{l=0}^{n} \tilde{z}_l x^l + \left(\sum_{m=0}^{n} \tilde{z}_m x^m\right)\left(\sum_{l=0}^{n} \tilde{y}_l x^l\right) \\ &\overset{\text{(??) für } n}{=} z_{n+1} y_{n+1} x^{2n+2} + z_{n+1} x^{n+1} \sum_{l=0}^{n} y_l x^l + y_{n+1} x^{n+1} \sum_{l=0}^{n} z_l x^l + \sum_{m=0}^{2n}\left(\sum_{l=0}^{m} \tilde{z}_l \tilde{y}_{m-l}\right) x^m \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\stackrel{(18)}{=} z_{n+1}y_{n+1}x^{2n+2} + z_{n+1}x^{n+1}\sum_{l=0}^{n} y_l x^l + y_{n+1}x^{n+1}\sum_{l=0}^{n} z_l x^l + \sum_{m=0}^{2n} c_m x^m \\
&+ \sum_{m=n+1}^{2n} \left(-z_{n+1}y_{m-(n+1)} - z_{m-(n+1)}y_{n+1}\right) x^m \\
&= z_{n+1}y_{n+1}x^{2n+2} + z_{n+1}x^{n+1}\sum_{l=0}^{n} y_l x^l + y_{n+1}x^{n+1}\sum_{l=0}^{n} z_l x^l + \sum_{m=0}^{2n} c_m x^m \\
&- z_{n+1}\sum_{m=n+1}^{2n} y_{m-(n+1)}x^m - y_{n+1}\sum_{m=n+1}^{2n} z_{m-(n+1)}x^m \qquad (19) \\
&\stackrel{m\to m+n+1}{=} z_{n+1}y_{n+1}x^{2n+2} + z_{n+1}x^{n+1}\sum_{l=0}^{n} y_l x^l + y_{n+1}x^{n+1}\sum_{l=0}^{n} z_l x^l + \sum_{m=0}^{2n} c_m x^m \\
&- z_{n+1}x^{n+1}\sum_{m=0}^{n-1} y_m x^m - y_{n+1}x^{n+1}\sum_{m=0}^{n-1} z_m x^m \\
&= z_{n+1}y_{n+1}x^{2n+2} + z_{n+1}x^{n+1}y_n x^n + y_{n+1}x^{n+1}z_n x^n + \sum_{m=0}^{2n} c_m x^m = \sum_{m=0}^{2n+2} c_m x^m.
\end{aligned}
$$

□